Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Grundinformationen:
Für Strukturelemente $B, C \subset \mathbb{R}^d$ bzw. $B, C \subset \mathbb{Z}^d$ gilt $(u \ominus B) \ominus C = u \ominus (B + C)$ wobei $B + C = \{x + y \mid x \in B,\ y \in C\}$, und Analoges gilt natürlich für endliche Summen von Strukturelementen.
Für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ lässt sich die Fouriertransformation als Integraloperator definieren via

$$\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d), \qquad [\mathcal{F}f](\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\xi\cdot x}\, \mathrm{d}x \qquad \text{für } \xi \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

wobei $\cdot$ dem euklidischen Skalarprodukt entspricht und $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ die Menge der beschränkten stetigen Funktionen bezeichnet. Insbesondere ist die Fouriertransformation ein linearer stetiger Operator mit $\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \|f\|_{L^1}$.
Darüber hinaus gilt der Faltungssatz, d.h. für $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\mathcal{F}(f * g) = (2\pi)^{d/2} \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g). \tag{2}$$

Aufgabe 4.1) [Zerlegung von Strukturelementen]
Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ sei die (diamantförmige) Menge $D_n := \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 \mid |i| + |j| \leq n\}$ und $K := 2^{\lfloor \ln_2(n) \rfloor}$ definiert.

- **a)** Zeigen Sie $\{(0,0), (\alpha,\alpha)\} + \{(-\alpha, 0), (0, -\alpha)\} = \{(\alpha, 0), (0, \alpha), (-\alpha, 0), (0, -\alpha)\} := D^0_\alpha$ für $\alpha \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie weiters $D_n = D_K + D^0_{n-K}$.
- **b)** Finden Sie eine Zerlegung $D_K = \sum_{k=1}^m B_k$ wobei $m = \mathcal{O}(\ln_2(K))$ und $B_k \subset \mathbb{Z}^2$ Strukturelemente welche genau zwei Elementen besitzen.

Hinweis. *Jede ganze Zahl* $z \in [0, 2^K - 1]$ *ist ein-eindeutig mit der Binärzahlendarstellung* $z = \sum_{l=0}^{K-1} a_l 2^l$ *mit* $a_l \in \{0,1\}$ *identifizierbar.*

Bemerkung. *Natürlich kann nicht jede Menge so elegant zerlegt werden, es ist aber durchaus möglich, mit algorithmischem Vorgehen nach bestmöglichen Zerlegungen zu suchen. Durch solche Zerlegungen kann der Rechenaufwand der Erosion stark reduziert werden.*

Aufgabe 4.2) [Langzeit-Verhalten der Fouriertransformation]
Es bezeichne $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ die Menge der abklingenden stetigen Funktionen (d.h. für $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ gilt $\|\xi_n\| \to \infty \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} g(\xi_n) = 0$). Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ gilt, also dass die Fouriertransformierte einer L^1 Funktion abklingend ist.

Hinweis. *Zeigen Sie zunächst dass für* $a < b$ *die Funktion* $\mathcal{F}(\chi_{[a,b]})$ *abklingend ist, und nutzen Sie passende Dichtheitsargumente.*

Bemerkung. *Wie das Beispiel zeigt, ist die Fouriertransformation einer* $L^1(\mathbb{R})$ *Funktion abklingend. Man kann zeigen, desto regulärer die Funktion, desto schneller klingt die Funktion ab. Das ist für praktische Anwendungen relevant, da in der Praxis die Fouriertransformation nur auf kompaktem Support berechnet werden kann, und damit ein Verlust an Information zu* *verzeichnen ist. Man sieht aber auch: desto regulärer die Funktion, desto weniger "schlimm" ist dieser Verlust.*

Aufgabe 4.3) [Diskrete und schnelle Fouriertransformation]
Für $N \in \mathbb{N}$ und $U, V \in \mathbb{C}^N$, $U = (U_0, \dots, U_{N-1})$ ist die diskrete Fouriertransformation und deren Inverse gegeben durch

$$\mathcal{F}\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N \qquad \mathcal{F}^{-1}\colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N \tag{3}$$

$$(\mathcal{F}U)_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} \qquad (\mathcal{F}^{-1}V)_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} V_k e^{2\pi i \frac{kl}{N}}. \tag{4}$$

a) Zeigen Sie, dass für die periodische Faltung $U *_{\text{per}} V$ von $U, V \in \mathbb{C}^N$ mit

$$U *_{\text{per}} V \in \mathbb{C}^N \qquad (U *_{\text{per}} V)_k = \sum_{l=o}^{N-1} U_l V_{(k-l) \bmod N} \quad \text{für } k \in \{0, \dots, N-1\} \tag{5}$$

der Faltungssatz $\mathcal{F}(U *_{\text{per}} V) = \sqrt{N}(\mathcal{F}U)(\mathcal{F}V)$ (mit komponentenweiser Multiplikation) gilt.

b) Zeigen Sie für N gerade und $l = 0, \dots, N/2-1$ die Identitäten

$$(\mathcal{F}U)_{2l} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} (U_k + U_{k+N/2}) e^{-2\pi i \frac{kl}{N/2}}, \tag{6}$$

$$(\mathcal{F}U)_{2l+1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{-2\pi i \frac{k}{N}} (U_k - U_{k+N/2}) e^{-2\pi i \frac{kl}{N/2}}. \tag{7}$$

c) Es sei $N = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Leiten Sie aus (6) und (7) eine Formel zur Berechnung der Fouriertransformation eines Vektors der Länge N mittels zwei Fouriertransformationen der Länge $N/2$ ab. Folgern Sie daraus eine rekursive Berechnungsmethode und zeigen Sie, dass diese die diskrete Fouriertransformation und die periodische Faltung der Länge N in $\mathcal{O}(N \log(N))$ elementaren Rechenschritten bewältigen kann (man spricht von Fast Fourier Transform).

Bemerkung. *Wie das Beispiel zeigt, übertragen sich viele Eigenschaften der klassischen Fouriertransformation auch auf die diskrete Fouriertransformation. Insbesondere lässt sich die schnelle Fouriertransformation in zahlreichen numerischen Methoden anwenden, um den Rechenaufwand massiv zu reduzieren.*

Programmier-Aufgabe 4.4) [Segmentierte Faltung]
Es sei $M = 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $N = KM$ für ein $K \in \mathbb{N}$. Es sei $U \in \mathbb{C}^N$ und $V \in \mathbb{C}^M$, wobei wir den Vektoren $U = (U_0, \dots, U_{N-1})$ mit der diskreten Funktion $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ mit $u_j = U_j$ für $j \in \{0, \dots, N-1\}$, und $u_j = 0$ sonst identifizieren (analog für v und V).

Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Wir wollen ein Programm schreiben, welches diskrete Faltung (Achtung, nicht die periodische Faltung!) $u*v$ berechnet, und die relevanten Werte wieder in einen Vektor $U*V \in \mathbb{C}^{N+M-1}$ speichert. Dies soll in $O(N\log(M))$ wie folgt berechnet werden:

- Der Vektor U wird in K Segmente der Länge M zerlegt, d.h. $U = (\widetilde{U}_0, \dots, \widetilde{U}_{K-1})$ mit $\widetilde{U}_k \in \mathbb{C}^M$ für $k = 0, \dots, K-1$.
- Jedes Segment $\widetilde{U}_k$ wird geeignet mittels schneller Fouriertransformation mit V gefaltet.
- Die Segmente $\widetilde{U}_k * V$ werden geeignet zu $U * V$ zusammengesetzt.

a) Begründen Sie mathematisch ihre Herangehensweise und die resultierende Komplexität.

b) Implementieren Sie eine entsprechende Matlab-Funktionen und testen Sie diese wie folgt: für $N = 640$, $M = 128$ sowie $\sigma = 10$ definiere

```
U=sin([0:N-1]*pi/100)+randn(1,N)*0.1
```

```
V=1/(sqrt(2*pi)*sigma)*exp(-([0:M]-(M-1)/2).^2/(2*sigma^2))
```

Hinweis. *Sie dürfen die in Matlab definierte Funktion "fft" zur Berechnung der schnellen Fouriertransformation nutzen.*

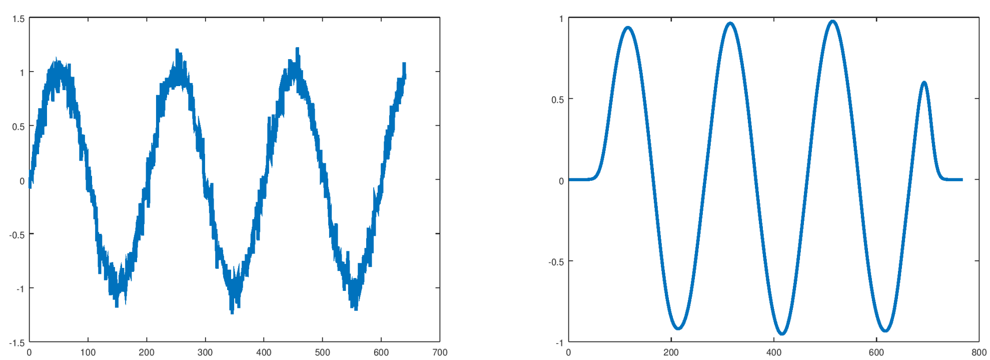

Abbildung 1: Links U, rechts durch Faltung geglättetes $U * V$.