

Grundinformationen: Für Funktionen $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ und $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ mit $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ für $p, q, r \in [1, \infty]$ (mit $\frac{1}{\infty} := 0$) ist die Faltung $f * g \in L^r(\mathbb{R}^d)$ definiert durch

$$[f * g](x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y) dy \quad \text{für fast alle } x \in \mathbb{R}^d. \quad (1)$$

Diese Operation ist bilinear und stetig im Sinne der Youngschen Ungleichung

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \quad (2)$$

Ist darüber hinaus $r = \infty$, so ist das Resultat der Faltung sogar eine stetige Funktion. Für eine Menge $B \subset \mathbb{R}^d$ (ein Strukturelement) und eine beschränkte Funktion u seien die morphologischen Operationen ‘Dilatation’ und ‘Erosion’ definiert durch

$$(u \oplus B)(x) = \sup_{y \in B} u(x+y), \quad \text{bzw.} \quad (u \ominus B)(x) = \inf_{y \in B} u(x+y). \quad (3)$$

Weiters bezeichne

$$u \odot (B, C) = \min\{u \ominus B, (1-u) \ominus C\} \quad (4)$$

die ‘Hit-or-Miss’ Operation bezüglich der Strukturelementen $B, C \subset \mathbb{R}^d$ und dem Bild $u: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$. Weiters bezeichne für Funktionen $u, v: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$ die Operation $u \setminus v = \max(u-v, 0)$.

Aufgabe 3.1) [Analytische Eigenschaften der Faltung]

Es sei $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und für $p \in [1, \infty)$ sei der lineare stetige Operator $K: L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ durch $Ku = u * k$ gegeben (wohldefiniert und stetig wegen Youngscher Ungleichung). Es bezeichne \rightharpoonup und \rightarrow die schwache bzw. norm Konvergenz in L^p sowie $v|_\Omega$ die Einschränkung einer Funktion v auf eine messbare Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Zeigen Sie:

- Es gilt $K \neq \text{id}_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ (d.h. die Identität auf $L^p(\mathbb{R}^d)$),
- Es sei $k \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ (mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$) und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei beschränkt und messbar, sowie $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Falls $u^n \rightharpoonup u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $n \rightarrow \infty$, dann gilt $(Ku^n)|_\Omega \rightarrow (Ku)|_\Omega$ in $L^p(\Omega)$ für $n \rightarrow \infty$.

Bemerkung. Im Hintergrund liegt Punkt b) daran, dass K (die Faltung mit $L^1 \cap L^{p^*}$) ein kompakter Operator ist. Wenn man Faltung auf Maße verallgemeinert sieht man leicht, dass Faltung mit dem Diracdelta der Identität auf L^p entspricht.

Aufgabe 3.2) [Separierbarkeit diskreter Filtermasken]

Analog zur ‘kontinuierlichen’ linearen Filterung lässt sich auch eine diskrete Version definieren, d.h. für $U: \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gilt $[H \boxtimes U]_{i,j} := \sum_{k=-r}^r \sum_{l=-r}^r H_{k,l} U_{i+k, j+l}$ wobei H endlichen Support haben muss, und damit insbesondere als Matrix (Filtermaske) $H \in \mathbb{R}^{(2r+1) \times (2r+1)}$ dargestellt werden kann. Eine Maske H wird separabel genannt, falls $H = F \otimes G$ d.h. $H_{ij} = F_i G_j$ für eindimensionale Filtermasken $F, G \in \mathbb{R}^{2r+1}$.

Geben Sie ein Verfahren an welches für ein $H \in \mathbb{R}^{(2r+1) \times (2r+1)}$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ und separable Filtermasken H_1, \dots, H_n berechnet, so dass

$$H = H_1 + H_2 + \dots + H_n \quad (5)$$

gilt und n **minimal** gilt.

Hinweis. Untersuchen Sie zunächst den Rang einer separablen Maske, um eine Charakterisierung separabler Masken zu finden, und versuchen Sie H in entsprechende separable Masken zu zerlegen.

Aufgabe 3.3) [Analytische Eigenschaften morphologischer Operatoren]

Es sei $B \subset \mathbb{R}^d$ ein nicht-leeres Strukturelement und es bezeichne T die Dilatation mit B (analoge Resultate gelten auch für die Erosion). Für $L > 0$ sei $\mathcal{C}_L = \{f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^d: |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \wedge \exists c > 0 \forall x \in \mathbb{R}^d: |f(x)| \leq c\}$ die Menge der beschränkten Funktionen mit Lipschitz Konstante kleiner gleich L . Zeigen Sie, dass T die Menge \mathcal{C}_L in sich selbst abbildet.

Aufgabe 3.4) [Erosion/Dilatation und partielle Differentialgleichung]

Es bezeichne $|\cdot|$ eine Norm auf \mathbb{R}^d und $|\cdot|_*$ die zugehörige duale Norm, sowie $tB = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq t\}$. Für $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt sei $u^-, u^+: [0, \infty[\times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$u^-(t, x) = (u \ominus tB)(x), \quad u^+(t, x) = (u \oplus tB)(x) \quad (6)$$

Zeigen Sie, dass:

- Für $s, t \geq 0$ gilt $u^-(t + s, \cdot) = u^-(t, \cdot) \ominus sB$ und analog für die Dilatation u^+ .
- In Punkten (t, x) , mit $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ in denen u^- bzw. u^+ total differenzierbar nach x und differenzierbar nach t ist, gilt

$$\frac{\partial u^-}{\partial t}(t, x) = -|\nabla u^-(t, x)|_* \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u^+}{\partial t}(t, x) = |\nabla u^+(t, x)|_* \quad (7)$$

Bemerkung. Wie das Beispiel zeigt, besitzen die morphologische Operatoren gewisse algebraische und analytische Eigenschaften, die zeigen, wie sich mit zunehmenden Strukturelement die Erosion oder Dilatation verhält. Da die Norm abstrakt ist, lässt sich dieses Resultat von den Kugeln sB auf allgemeine konvexe beschränkte Strukturelemente, die den Ursprung im inneren enthalten, adaptieren. Man sieht insbesondere den Zusammenhang mit der klassischen Analysis, dass die stärkste Änderung einer Funktion in Richtung des Gradienten stattfindet und der dualen Norm des Gradienten entspricht.

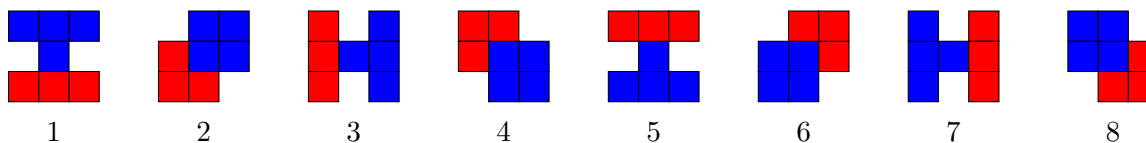
Programmier-Aufgabe 3.5) [Skelett-Berechnung]

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion `[imgnew]=reduce_to_skeleton(img)`, welche sukzessiv die

Operation T auf einem gegebenen diskreten binären Bild “img” anwendet, bis ein Fixpunkt erreicht ist. Dabei sei

$$T(U) = T_8 \circ T_7 \circ \dots \circ T_1(U) \quad \text{mit} \quad T_i(U) = U \setminus (U \odot (B_i, C_i)), \quad (8)$$

wobei \odot den Hit-or-Miss Operator entspricht und die Masken im Folgenden gegeben sind. Dabei sind Mengen B_i blau und C_i rot dargestellt. Testen Sie Ihre Implementierung an dem verlinkten Bild¹.



Bonus: Erneut gibt es zwei Bonuspunkte, wenn der Code eine sehr effiziente Implementierung darstellt. Als grobe Richtlinie: Bei mir werden 19 Iterationen durchgeführt, was ungefähr eine halbe Sekunde dauert.

¹ https://imsc.uni-graz.at/huber/Teaching_pages/2020_blatte_Image_Processing/image3.png