Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Aufgabe 1.1) [Koordinatentransformation]
Es seien $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^d$ offen und es bezeichne $\varphi \colon \Omega \to \Omega'$ einen $\mathcal{C}^1$ Diffeomorphismus – das heißt φ ist stetig differenzierbar und bijektiv und gleiches gilt für die Umkehrfunktion – sodass $|\det(\nabla\varphi(x))| \geq c$ für eine Konstante $c > 0$ und alle $x \in \Omega$. Es sei $p \in [1, \infty]$ und $\psi \colon L^p(\Omega') \to L^p(\Omega)$ mit $[\psi(f)](x) = f(\varphi(x))$ definiert.

a) Zeigen Sie, dass ψ wohldefiniert ist und einer linearen stetigen Funktion entspricht.

b) Finden Sie für jedes $p \in [1, \infty)$ ein Beispiel in der die Annahme an die Determinante verletzt ist (aber Diffeomorphismus) und ψ nicht wohldefiniert ist.

c) Zeigen Sie, dass wenn auch $|\det(\nabla\varphi^{-1}(y))| \geq c$ für eine Konstante $c > 0$ und alle $y \in \Omega'$, so ist ψ stetig invertierbar und bestimmen Sie die Inverse. Zeigen Sie weiters, dass $T_y : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ und $D_A : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ mit A regulär wohldefiniert und stetig sind und berechnen Sie deren Inversen.

Bemerkung. *Wie diese Aufgabe zeigt, kann man unter passenden Annahmen Diffeomorphismen vor L^p Funktionen schalten, ähnliche Verknüpfungen für nicht Diffeomorphismen oder gar nicht bijektive Funktionen sind aber mit Vorsicht zu genießen, und man sollte diese für Funktionen in $L^p_{H_\varphi}$ betrachten (L^p bezüglich dem Histogramm von φ).*

Aufgabe 1.2) [Interpolationsfunktionen]

a) Es sei $\phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Interpolationsfunktion, das heißt $\phi(i) = \delta_{0,i}$ für $i \in \mathbb{Z}$ und es bezeichne ϕ_i die Funktion gegeben durch $\phi_i(x) = \phi(x - i)$. Ferner gelte $\phi \geq 0$ auf $\mathbb{R}$ sowie $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \phi_i(x) = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass für eine Folge $(U_i)_{i\in\mathbb{Z}} \in l^\infty(\mathbb{Z})$ und $u = \sum_{i\in\mathbb{Z}} U_i\phi_i$ die Ungleichung $\inf_i U_i \leq u(x) \leq \sup_i U_i$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, sowie dass die obige Eigenschaften für ϕ^1 und ϕ^0 (den Interpolationsfunktionen für stückweise lineare Interpolation bzw. nearest neighbor Interpolation) gelten.

b) Es sei $\Omega = [0, 1]$ und für $N \in \mathbb{N}$ die Partition $\Omega = \bigcup_{i=0}^{N-1} \Omega_i$ mit $\Omega_i = [\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[$ für $i = 0, \ldots, N-1$. Es bezeichne $M_N \colon L^1(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ den Operator der Mittelwert-Abtasten vornimmt, dass heißt für $u \in L^1(\Omega)$ gilt $(M_N u)_i = \frac{1}{|\Omega_i|}\int_{\Omega_i} u \,\mathrm{d}x$ und $\phi^0_N \colon \mathbb{R}^N \to L^1(\Omega)$ sodass $(\phi^0_N U)(x) = U_i$ falls $x \in \Omega_i$. Zeigen Sie, dass $\phi^0_N M_N$ in L^1 stark gegen die Identität konvergiert, d.h. für alle $u \in L^1(\Omega)$ gilt $\lim_{N\to\infty} \|\phi^0_N M_N u - u\|_{L^1} = 0$.

Hinweis. *Zeigen Sie die Aussage zunächst für stetiges u und nutzen Sie das $\mathcal{C}(\Omega)$ dicht in $L^1(\Omega)$ liegt.*

Aufgabe 1.3) [Distributionelle Ableitungen und Deltamaße]
Es bezeichne $\Omega = (a, b)$ mit $a < b$ ein offenes beschränktes Intervall. Zur Erinnerung, ein signiertes, sigma-endliches Maß v ist die "distributionelle Ableitung" von $u \in L^1(\Omega)$ falls für jede $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ gilt

$$-\int_\Omega u(x)\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \phi(x)\,\mathrm{d}v(x) := v(\phi).$$

a) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ stückweise konstant, d.h. $u\big|_{(x_i,x_{i+1})}$ ist konstant für $i = 1, \dots, n$ und $a = x_1 <, \dots, < x_{n+1} = b$. Zeigen Sie, dass dann die distributionelle Ableitung (weak derivative) von u eine endliche Linearkombination von Dirac-Maßen (Dirac Deltas) ist.

b) Es sei $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ die Menge der endlichen Radon-Maße – d.h. signiert, endlich und regulär von innen auf der Borel-Algebra von $\overline{\Omega}$. Dann gilt nach dem Darstellungssatz von Riesz, dass $\mathcal{M}(\overline{\Omega}) \widehat{=} \mathcal{C}(\overline{\Omega})^*$ im Sinne von $T_\mu(f) = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\mu$, d.h. jedes lineare stetige Funktional auf $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ lässt sich als Integral bzgl. einem Maß $\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ schreiben.

Es sei $(c_k^n)_{n,k\in\mathbb{N}}$ eine Folge sodass für festes n gilt $c^n := (c_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \in l^1(\mathbb{N})$ und $c^n \xrightarrow{l^1} c$ für ein $c \in l^1(\mathbb{N})$ und $(x_k^n)_{n,k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in (a,b), sodass $x^n := (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}} \xrightarrow{l^\infty} x$ für eine Folge $x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit Werten in (a,b). Zeigen Sie, dass $\mu^n = \sum_{k=1}^\infty c_k^n \delta_{x_k^n} \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ und μ^n schwach* (schwach stern) gegen $\mu = \sum_{k=1}^\infty c_k \delta_{x_k}$ konvergiert.

c) Zeigen Sie weiters, dass für $z \in (a,b)$ und beliebige Folge $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zahlen in $(a,b)\backslash\{z\}$ mit $\lim_n z^n = z$ nicht δ_{z^n} gegen δ_z in der $\mathcal{M}$ Normtopologie konvergiert.

Bemerkung. *Dieses Beispiel veranschaulicht, dass die Ableitungen von Funktionen mit Sprüngen sich als Summe von Dirac Deltas (gewichtet mit der Sprunghöhe) schreiben lassen, und diese insbesondere nicht in klassische Sobolevräume fallen. Außerdem ist anzumerken, dass sich analoge Resultate in höheren Dimensionen verallgemeinern lassen, wobei die Diracs dann durch passende Hausdorff-Maße zu ersetzen sind.*

Programmier-Aufgabe 1.4) [Interpolation und Abtastung]
Gegeben sei $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, mit $\varphi(x,y) = D_{\alpha(x,y)}(x,y)$ mit $\alpha(x,y) = 0.5\pi(x^2+y^2)$ und D_α die Rotation um den Ursprung um den Winkel α. Weiters sei ein diskrete Bild U gegeben mit zugehörigem kontinuierlichem Bild $u\colon [-1,1]^2 \to \mathbb{R}$ das via bilinearer Interpolation entstanden ist und $U_{ij} = u(2i/N-1, 2j/M-1)$ mit $i \in \{0,\dots,N\}$, $j \in \{0,\dots,M\}$ ($N+1 \times M+1$ ist Auflösung). Weiters bezeichne $v = \psi(u)$ (im Sinne von Aufgabe 1.1), und V ein zugehöriges diskretes Bild das via punktweisem Abtasten entsteht.

Schreiben Sie ein Matlab-Funktion [V]=myrotation(U), welches für gegebenes Bild U, das Bild V bestimmt. Dabei setzen Sie u außerhalb von $[-1,1]^2$ mit 0 fort. Dabei sollen Sie keine vorgefertigte Funktion zur Berechnung der Interpolation verwenden! Testen Sie ihre Implementierung anhand der Bilder (Bild1, Bild2).

Bonus: Beim Programmieren ist Effizienz des Codes für echte Anwendungen von großer Bedeutung. Mit einer "naiven" Implementierung lässt sich auf meinem Computer die Berechnung für die Bilder in ungefähr 30 bzw. 140 Sekunden vornehmen, mit einer Intelligenten in nur 0.05 bzw. 0.4 Sekunden. Versuchen Sie Ihre Implementierung möglichst effizient zu machen. Jede Implementierung die auf meinem Computer in jeweils unter einer Sekunde pro Bild läuft erhält zwei Bonuspunkte. Sollte außerdem eine Implementierung wesentlich effizienter sein als alle anderen, so wird ein weiterer Bonuspunkt wirkend.

Bemerkung. *Der Wechsel zwischen diskreten und kontinuierlichen Darstellungen von Bildern ist ein essentieller Bestandteil der mathematischen Bildverarbeitung, da einerseits kontinuierliche Modelle mit einer Vielzahl mathematischer Werkzeuge bearbeitet werden können und Aussagen unabhängig von Auflösung zulassen, andererseits lassen sich aber Daten nur im diskreten Setting messen und verarbeiten.*