Projekt 5: Total Variation für Farb-Bilder

Wir wollen uns im Folgenden mit den Eigenschaften der Totalen Variation sowie deren Anwendung auf Farbbilder beschäftigen. Zur Erinnerung, für ein beschränktes Lipschitzgebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R})$ ist die Totale Variation definiert durch

$$\mathrm{TV}(u) = \sup \left\{ \int_\Omega u \mathrm{div}[\varphi] \, \mathrm{d}x \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^d), \; \|\varphi\|_\infty \le 1 \right\}, \tag{1}$$

was aufgrund der Dualität des Raums aller Radonmaße mit dieser Art von Dualpaarung der Radon-Norm der distributionellen Ableitung von u entspricht. Insbesondere, gilt für u hinreichend glatt (e.g. $\mathcal{C}^1$), dass $\mathrm{TV}(u) = \int_\Omega |\nabla u| \, \mathrm{d}x$, verallgemeinert aber zu Funktionen deren Ableitungen Maße sind (um beispielsweise Sprünge zu berücksichtigen). Zunächst überzeugen wir uns von einigen grundlegenden Eigenschaften dieser Funktion.

Aufgabe 1) Wir betrachten den etwas simpleren Fall $d = 1$, $\Omega = [0, 1]$. Es sei $u^* \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ monoton wachsend mit Randwerten $u^*(0) = 0$, $u^*(1) = 1$ (im Trace-Sinne). Zeigen Sie, dass $\mathrm{TV}(u^*) = 1$ und jedes $v \in \mathrm{BV}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ dass nicht monoton wachsend ist und die selben Randwerte besitzt, hat $\mathrm{TV}(v) > 1$.

Das Nutzen einer solchen Funktion für uns liegt in der Anwendung als Strafterm für Entrausch-Probleme.

Aufgabe 2) Es sei $f \in L^1(\Omega)$ und wir betrachten das Problem

$$\min_{u \in L^1(\Omega)} \int_\Omega |u - f| \, \mathrm{d}x + \lambda \mathrm{TV}(u) \tag{2}$$

für ein $\lambda > 0$. Zeigen Sie zunächst, dass dieses Problem eine Lösung besitzt. Zeigen Sie darüber hinaus, dass es ein $\lambda_0 > 0$ gibt, sodass für $\lambda \ge \lambda_0$ gilt, dass für c^* Median, d.h.

$$c^* \in \operatorname*{argmin}_{c \in \mathbb{R}} \int_\Omega |c - f| \, \mathrm{d}x, \tag{3}$$

$u^* = c^* \mathbf{1}$ (konstante Funktion mit Wert c^*) eine Lösung von (2) ist. Folgern Sie, dass im Allgemeinen (2) keine eindeutige Lösung besitzt (Gegenbeispiel konstruieren).

Allgemeiner könnte man dass Entrausch-Problem

$$\min_{u \in L^q(\Omega)} \|u - f\|_{L^q(\Omega)}^q + \lambda \mathrm{TV}(u) \tag{4}$$

betrachten, welches für $1 \le q \le \frac{d}{d-1}$ lösbar ist.

Nun, da wir ein besseres Verständnis für die Totale Variation haben, wollen wir betrachten, wie man dieses für Farbbilder anwenden kann, d.h. $u \colon \Omega \to \mathbb{R}^c$, wobei c die Anzahl der Kanäle bezeichnet, und klassischerweise würde man $c = 3$ für Blau-Grün-Rot Bilder betrachten.

Für $u \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^c)$ definieren wir die Totale Variation via

$$\mathrm{TV}(u) = \sup \left\{ \int_\Omega u \cdot \mathrm{div}[\varphi] \, \mathrm{d}x \;\middle|\; \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{c \times d}), \; \||\varphi|_A\|_\infty \le 1 \right\}, \tag{5}$$

wobei $|\cdot|_A$ eine Norm in $\mathbb{R}^{c \times d}$ bezeichnet, $\mathrm{div} \colon \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{c \times d}) \to \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{R}^c)$ kanalweise zu verstehen ist und $\cdot$ das punktweise $l^2(\mathbb{R}^c)$ Skalarprodukt bezeichnet. Die Wahl der Norm

$|\cdot|_A$ hat dabei gewissen Einfluss auf das resultierende Funktional. Klassische Wahlen wären $\mathrm{TV}_{\mathrm{uncor}}$ für $|B|^2 = \max_{l=1,\dots,c} \sum_{j=1}^{d} |B_{ij}|^2$, $\mathrm{TV}_{\mathrm{frob}}$ mit der Frobeniusnorm und $\mathrm{TV}_{\mathrm{spec}}$ mit der Spektralnorm. Letztere ist besonders vielversprechend wegen ihrem Zusammenhang mit der Nuklearnorm und deren Eigenschaft den Rang einer Matrix zu bestrafen (siehe Projekt 4), aber auch numerisch am "schwierigsten".

Aufgabe 3) Es sei $u = (u_1, \dots, u_c)^T \in L^1(\Omega, \mathbb{R}^c)$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{TV}_{\mathrm{uncor}}(u) = \sum_{l=1}^{c} \mathrm{TV}(u_l)$, während es für beliebige Norm $|\cdot|_A$ Konstanten $c_1, c_2 > 0$ gibt, sodass

$$c_1 \sum_{l=1}^{c} \mathrm{TV}(u_l) \leq \mathrm{TV}(u) \leq c_2 \sum_{l=1}^{c} \mathrm{TV}(u_l), \tag{6}$$

das heißt diese Totale Variation ist "topologisch" äquivalent zu der Summe der Variationen der einzelnen Kanäle, wodurch praktisch alle Eigenschaften von $\mathrm{BV}(\Omega, \mathbb{R})$ auf $\mathrm{BV}(\Omega, \mathbb{R}^c)$ übertragen werden.

Betrachten Sie die Funktionen $\xi, \eta \colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad \text{und} \qquad \eta(x) = \begin{cases} 1 & x < 0.01 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \tag{7}$$

sowie die Funktionen $u = (\xi, 1-\xi)^T$ und $v = (\xi, 1-\eta)^T$ mit zwei Kanälen. Skizzieren Sie u und v und bestimmen sie $\mathrm{TV}_{\mathrm{uncor}}$ sowie $\mathrm{TV}_{\mathrm{frob}}$ für diese.

Bemerkung. *Da für TV_{uncor} Additivität gilt, ist $\min_{u\in L^2(\Omega,\mathbb{R}^c)} \|u-f\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^c)} + \lambda TV_{uncor}(u)$ äquivalent zur Lösung von (4) für jeden individuellen Kanal (für $q = 2$). Für andere Normen gilt dies nicht, und dies kann genutzt werden, um die Rekonstruktion verschiedener Kanäle zu Koppeln, insbesondere ist es für die Frobeniusnorm (oder Spektralnorm) "günstiger" Kanten in verschiedenen Kanälen aneinander auszurichten, wodurch man mehr Information über die Position von Kanten erhält, was potentiell zu besserer Rekonstruktion von gemeinsamen Kanten führt.*

Aufgabe 4) Folgern Sie, dass

$$\min_{u \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^c)} \|u - f\|^2_{L^2(\Omega,\mathbb{R}^c)} + \lambda \mathrm{TV}_{\mathrm{frob}}(u) \tag{8}$$

eine eindeutige Lösung besitzt falls $d = 2$.

Die Aufgaben 7.2 und 7.3 des 7. Übungszettels zur Herleitung eines Lösungsalgorithmus im Diskreten lassen sich absolut analog für die multi-Kanal-Bilder nachrechnen, mit dem einzigen Unterschied, dass man auf die passende Dualität der Normen achten und die Projektion entsprechend anpassen muss.

Aufgabe 5) Es sei $\Omega = \{1, \dots, N\}^2$ (diskreter Bildraum) und wir wollen eine diskrete Version von (8) numerisch lösen. Wir definieren den Projektionsoperator

$$\mathrm{proj}_\lambda \colon \mathbb{R}^{c\times 2} \to \mathbb{R}^{c\times 2} \quad \text{mit} \qquad \mathrm{proj}_\lambda(q) = \begin{cases} \lambda \frac{q}{|q|_{\mathrm{frob}}} & \text{falls } |q| > \lambda, \\ q & \text{sonst,} \end{cases} \tag{9}$$

und verstehen $\mathrm{proj}_\lambda(P)$ für $P \in l^2(\Omega, \mathbb{R}^{c\times 2})$ stillschweigend als punktweise Anwendung von proj_λ. Man kann zeigen, dass für beliebiges $\tau > 0$ die Optimalitätsbedingungen von (8) äquivalent zu

$$P^* = \mathrm{proj}_\lambda\big(P^* + \tau\nabla_N(\mathrm{div}_N[P^*] + U^0)\big) \tag{10}$$

ist, wobei ∇_N und div_N kanalweise angewendet werden. Daraus lässt sich die Fixpunktiteration

$$\begin{cases} P_0 \in \mathbb{R}^{N\times N\times c\times 2} \\ U_{n+1} = \mathrm{div}_N[P_n] + U^0 \\ P_{n+1} = \mathrm{proj}_\lambda\big(P_n + \tau\nabla_N(U_{n+1})\big) \end{cases} \tag{11}$$

ableiten. Für $\tau \leq \frac{1}{4}$ gilt $\mathrm{div}_N[P_n] + U^0 \to U^*$ mit U^* Lösung von (8). Implementieren Sie diesen Lösungsalgorithmus für (8) und testen Sie ihn für $P_0 = 0$ und U_0 gemäß dem Bild Link.