

Projekt 2: Gefilterte Rückprojektion

Wir wollen uns im Folgenden mit dem bildgebenden Verfahren der Computed Tomography beschäftigen.

Die Idee von Computed Tomography (CT) – beispielsweise im Kontext medizinischer Bildgebung – ist es, Röntgenbilder eines Objekts von vielen verschiedenen Richtungen aufzunehmen um Rückschlüsse auf die unbekannt Dichte dieses Objekts zu erhalten. Dabei wurde in Projekt 1 die Modellierung dieses Problems bearbeitet, welche zeigt, dass die relevante Operation die Radontransformation ist (siehe unten).

Wir betrachten das Gebiet $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ dem Einheitskreis und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichne die Dichte eines Objekts in diesem Kreis. Man kann alle Geraden durch Ω mittels den Parametern $s \in [-1, 1]$, $\varphi \in [0, \pi[$ eindeutig via $\gamma_{s,\varphi}(t) = t\nu^\perp(\varphi) + s\nu(\varphi)$ beschreiben, siehe Abbildung unten.

Definition. Es sei $\Omega' = [-1, 1] \times [0, \pi[$ (was die Menge aller Geraden durch Ω parametrisiert) und $\nu(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\nu^\perp(\varphi) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))^T$. Wir definieren

$$\mathcal{R}: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega') \quad \text{und} \quad \mathcal{R}^*: L^2(\Omega') \rightarrow L^2(\Omega) \quad (1)$$

die Radontransformation und die Rückprojektion (backprojection) welche für $f \in C(\overline{\Omega})$ und $g \in C(\overline{\Omega}')$ durch

$$[\mathcal{R}f](s, \varphi) = \int_{-1}^1 f(s\nu(\varphi) + t\nu^\perp(\varphi)) dt, \quad [\mathcal{R}^*g](x) = \int_0^\pi g(x \cdot \nu(\varphi), \varphi) d\varphi \quad (2)$$

definiert sind (hierbei wird $f(x) = 0$ für $x \notin \Omega$ stillschweigend angenommen), und sich stetig nach L^2 fortsetzen lassen.

Wenn man Röntgenbilder von allen Winkeln $\varphi \in [0, \pi[$ aufnimmt, kann man versuchen die unbekannt Dichte f des Körpers zu rekonstruieren, was Lösen der Gleichung

$$\mathcal{R}f = g \quad (3)$$

nach f entspricht, wobei g den gemessenen Daten (in Detektorposition s und Winkel φ) entspricht. Wir wollen im Folgenden eine Formel herleiten, die zur Lösen von (3) dient.

Aufgabe 1) Zeigen Sie, dass $\mathcal{R}^*\mathcal{R}$ einem Faltungsoperator mit einem Faltungs-Kernel in L^1 entspricht. Hierbei ist erneut f stillschweigend mit Null fortgesetzt, und die Faltung passend auf Ω eingeschränkt.

Man kann zeigen, dass (3) äquivalent zu $k * f = \mathcal{R}^*\mathcal{R}f = \mathcal{R}^*g$, also könnte man (3) als Entfaltungsproblem verstehen. Dies legt nahe, dass die Radontransformation in gewissem Zusammenhang mit der Fouriertransformation steht, und in der Tat:

Es bezeichne $\widehat{\Omega} = \mathbb{R}^2$ und $\widehat{\Omega}' = \mathbb{R} \times [0, \pi[$ sowie $\mathcal{F}_2: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\widehat{\Omega})$ die Standard-Fouriertransformation in 2D (wobei man Funktionen außerhalb von Ω mit Null fortsetzt), und $\mathcal{F}_1: L^2(\Omega') \rightarrow L^2(\widehat{\Omega}')$ die Fouriertransformation bezüglich der ersten Variable (als ob die Winkel-Variable φ konstant wäre und man nur in der s -Variable transformieren). Es sei

$$T: \text{dom}(T) \subset L^2(\widehat{\Omega}) \rightarrow L^2(\widehat{\Omega}'), \quad \text{mit } [Tv](s, \varphi) = v(s\nu(\varphi)) \text{ für } v \in \text{dom}(T) \quad (4)$$

$$\text{wobei } \text{dom}(T) = \{v \in L^2(\widehat{\Omega}) \mid x \mapsto v(x)/|x|^{\frac{1}{2}} \text{ ist in } L^2\}$$

der "Slice Operator".

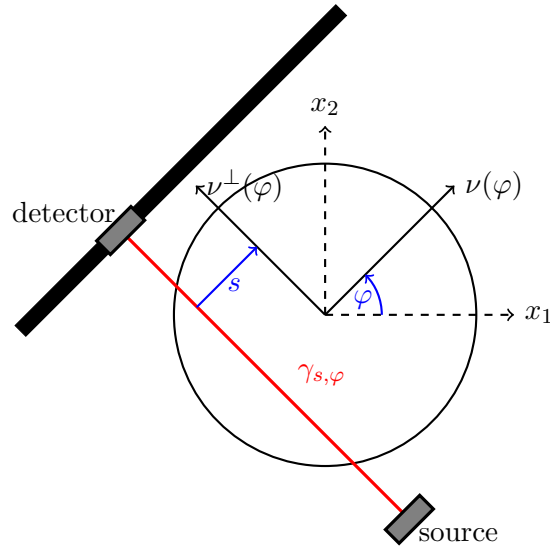


Abbildung 1: Geometrie der Radontransformation. Von der Quelle wird Radioaktivität ausgesandt, die sich entlang einer Gerade zum Detektor bewegt. Dieser Weg ist parametrisiert via $t \mapsto s\nu(\varphi) + t\nu^\perp(\varphi)$, wobei $\nu(\varphi)$ die Detektorrichtung und s die Detektorposition bezeichnet. Die Richtung $\nu^\perp(\varphi)$ entspricht der Rotation von $\nu(\varphi)$ um $\frac{\pi}{2}$ und ist parallel zu $\gamma_{s,\varphi}$.

Aufgabe 2) Zeigen Sie, dass T wohldefiniert linear und $\|\cdot\|_{L^2}$ - $\|\cdot\|_{L^2}$ abgeschlossen ist. Folgern Sie, dass $\mathcal{F}_2(L^2(\Omega)) \subset \text{dom}(T)$ und

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}_1\mathcal{R} = T\mathcal{F}_2 \quad \text{in } L^2(\Omega), \quad (5)$$

indem Sie die Gleichheit zunächst für stetige Funktionen zeigen, und dann Stetigkeit und Abgeschlossenheit nutzen um (5) zu zeigen.

Das heißt, ein-dimensionale Fouriertransformation der Radontransformation entspricht dem Slice Operator (also Auswertung entlang einer Geraden) der zwei-dimensionalen Fouriertransformation; dies ist auch als Fourier Slice Theorem bekannt.

Aufgabe 3) Es sei $M: \text{dom}(M) \subset L^2(\widehat{\Omega}') \rightarrow L^2(\widehat{\Omega}')$ mit $\text{dom}(M) = \{v \in L^2(\widehat{\Omega}') \mid [(s, \varphi) \mapsto v(s, \varphi)|s|^{\frac{1}{2}}] \in L^2, [(s, \varphi) \mapsto v(s, \varphi)|s|] \in L^1\}$ der Multiplikationsoperator $[Mv](s, \varphi) = v(s, \varphi)|s|^{\frac{1}{2}}$ für $v \in \text{dom}(M)$. Es sei $\mathcal{R}f = g$ für ein $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in L^2(\Omega')$ sodass $\mathcal{F}_2f \in L^1(\widehat{\Omega})$ und $\mathcal{F}_1g \in \text{dom}(M)$. Zeigen Sie, dass dann

$$f = \frac{1}{2\pi}\mathcal{R}^*\mathcal{F}_1^{-1}M\mathcal{F}_1g. \quad (6)$$

Diese Formel wird als Gefilterte Rückprojektion bezeichnet, und ist eine Inversionsformel der Radontransformation die allerdings nicht überall definiert ist, und nicht stetig von g abhängt, siehe auch Projekt 1.

Aufgabe 4) Sie finden in <https://zenodo.org/record/1254206#.XuhljbpgqSQ> einen Datensatz zur Tomographie einer Walnuss, der sowohl eine bereits initialisierte Matrix entsprechend der Radontransformation, als auch die dazugehörigen Messdaten enthält. Implementieren Sie die Gefilterte Rückprojektion und testen Sie diese anhand des Walnuss Datensatzes.