

Projekt 1: Modellierung der Radon Transformation

Wir wollen uns im Folgenden mit der Modellierung der bildgebenden Verfahren Röntgenaufnahmen und Computed Tomography beschäftigen.

Wir betrachten das Gebiet $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ (dem Einheitskreis) und $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichne die Dichte eines Objekts in diesem Kreis – wir denken beispielsweise an die Dichte des Körpers eines Menschen im Kontext medizinischer Untersuchungen via Computed Tomography.

Wir wollen zunächst modellieren, wie ein Röntgenbild erzeugt wird. Dazu betrachten wir die Schar von Geraden $\{\gamma_{s,\varphi}\}_{(s,\varphi) \in \Omega'}$ mit $\Omega' = [-1, 1] \times [0, \pi[$ mit $\gamma_{s,\varphi}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma_{s,\varphi}(t) = t\nu^\perp(\varphi) + s\nu(\varphi)$ wobei $\nu(\varphi) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))^T$, $\nu^\perp(\varphi) = (-\sin(\varphi), \cos(\varphi))^T$. Wir nehmen an, wir schicken einen Röntgenstrahl entlang einer Gerade $\gamma_{s,\varphi}$ durch das Objekt und die Intensität $I_{s,\varphi}: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ des Strahls nimmt entlang des Weges ab (der Strahl verliert an Intensität da er Energie an das Gewebe abgibt das er durchquert). Wir nutzen die Modellierungsannahme, dass die Abnahme der Intensität bilinear von der Intensität selbst und der Dichte f abhängt, d.h.

$$\frac{dI_{s,\varphi}}{dt}(t) = -cI_{s,\varphi}(t)f(\gamma_{s,\varphi}(t)), \quad I_{s,\varphi}(-1) = I_0, \tag{1}$$

wobei $c > 0$ eine Konstante (unabhängig von f , I , s oder φ) ist, $I_0 > 0$ die Ausgangsintensität (die Strahlung die wir aussenden) bezeichnet, und $f(x) = 0$ für $x \notin \Omega$ stillschweigend angenommen wird.

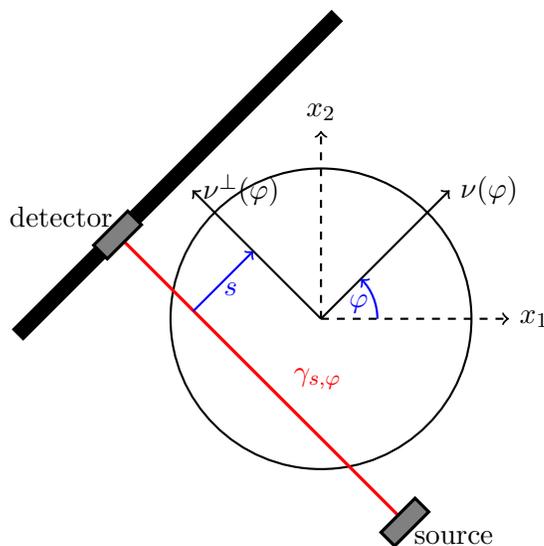


Abbildung 1: Geometrie der Radontransformation. Von der Quelle wird Radioaktivität ausgesandt, die sich entlang einer Gerade zum Detektor bewegt. Dieser Weg ist parametrisiert via $t \mapsto s\nu(\varphi) + t\nu^\perp(\varphi)$, wobei $\nu(\varphi)$ die Detektorrichtung und s die Detektorposition bezeichnet. Die Richtung $\nu^\perp(\varphi)$ entspricht der Rotation von $\nu(\varphi)$ um $\frac{\pi}{2}$ und ist parallel zu $\gamma_{s,\varphi}$.

Aufgabe 1) Wir nehmen an dieser Stelle zusätzlich an, dass f stetig ist. Es bezeichne $I_1(s, \varphi) = I_{s,\varphi}(1)$ die Intensität nach dem Durchqueren des Objekts (welche dann von einem

Detektor gemessen wird). Zeigen Sie, dass

$$\ln\left(\frac{I_0}{I_1(s, \varphi)}\right) = c \int_{-1}^1 f(t\nu^\perp(\varphi) + s\nu(\varphi)) dt = c \int_{\Omega} f(x) d\mathcal{H}^1 \llcorner \gamma_{s, \varphi}(x). \quad (2)$$

Das heißt der Logarithmus des relative Intensitätsverlusts entspricht dem Linienintegral der Dichte f entlang der relevanten Geraden.

Nun könnte man ein Röntgenbild (bzw. Röntgensignal) von dem Winkel φ für verschiedene Positionen s aufnehmen, und $g_\varphi(s) = \ln\left(\frac{I_0}{I_1(s, \varphi)}\right)$ entspricht den aufgenommenen Daten (ein einfaches Röntgenbild). Allerdings enthalten einzelne Röntgenbilder für viele Anwendungen zu wenig Information, und man würde gerne die Dichte f selbst kennen. Um dies zu erreichen betrachten wir Röntgenaufnahmen von allen Richtungen. Dies motiviert die Definition der Radontransformation

$$\tilde{\mathcal{R}}: \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \rightarrow L^2(\Omega'), \quad [\tilde{\mathcal{R}}f](s, \varphi) = \int_{\Omega} f(x) d\mathcal{H}^1 \llcorner \gamma_{s, \varphi}(x). \quad (3)$$

Das heißt die Radontransformation entspricht einer Sammlung aller Linienintegralen entlang Geraden durch Ω .

Aufgabe 2) Zeigen Sie, dass $\tilde{\mathcal{R}}$ linear ist, und stetig von $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ bezüglich $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ nach $\|\cdot\|_{L^2(\Omega')}$ auf $L^2(\Omega')$ ist. Folgern Sie, dass es daher einen eindeutigen Operator $\mathcal{R}: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega')$ gibt, sodass $\mathcal{R}|_{\mathcal{C}(\bar{\Omega})} = \tilde{\mathcal{R}}$.

Bestimmen Sie weiters den adjungierten Operator $\mathcal{R}^*: L^2(\Omega') \rightarrow L^2(\Omega)$. Skizzieren Sie für $g \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}')$ den geometrischen Zusammenhang zwischen einem festen (beliebigen) $\tilde{x} \neq 0$ und allen s, φ welche zur Berechnung von $[\mathcal{R}^*g](\tilde{x})$ herangezogen werden müssen.

Das heißt man kann die Radontransformation auch auf L^2 betrachten, was etwas unerwartet sein mag, da Linienintegrale auf L^2 keinen Sinn machen (auf Nullmengen definiert). Allerdings hat dies den großen Vorteil, dass man auf einem Hilbertraum arbeiten kann, statt des nicht-reflexiven Banachraums $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$.

Folglich besteht ein Tomographie-Problem in dem Lösen der Gleichung

$$\mathcal{R}f = g \quad (4)$$

nach f , wenn g dem gemessenen logarithmischen relativen Intensitätsverlust entspricht, und f die noch unbekannt Dichte ist. Man kann zeigen, dass \mathcal{R} ein injektiver Operator ist, das heißt man kann tatsächlich f eindeutig feststellen (wenn $g \in \text{rg}(\mathcal{R})$), aber \mathcal{R} besitzt keine stetige Inverse.

Aufgabe 3) Es sei $\bar{s} \in (0, 1)$ und $\Omega_{\bar{s}} = \{x \in \Omega \mid |x| \in [\bar{s}, 1]\}$ und $u_{\bar{s}} = \frac{\chi_{\Omega_{\bar{s}}}}{|\Omega_{\bar{s}}|^{\frac{1}{2}}}$ die gewichtete charakteristische Funktion in $\Omega_{\bar{s}}$. Zeigen Sie, dass

$$\|u_{\bar{s}}\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad \text{aber} \quad \lim_{\bar{s} \rightarrow 1} \|\mathcal{R}u_{\bar{s}}\|_{L^2(\Omega')} = 0. \quad (5)$$

Folgern Sie, dass $\mathcal{R}: L^2(\Omega) \rightarrow \text{rg}(\mathcal{R}) \subset L^2(\Omega')$ nicht stetig invertierbar sein kann.

Eine Möglichkeit, das Problem (4) dennoch auf eine stetige Art (approximativ) zu lösen ist der SIRT Algorithmus (eine Art Landweber Iteration). Dazu betrachtet man die Iteration

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_{n+1} = f_n - \omega \mathcal{R}^*(\mathcal{R}f_n - g) \end{cases} \quad (6)$$

wobei $\omega < \frac{2}{\|\mathcal{R}\|^2}$ ein Relaxationsparameter ist.

Aufgabe 4) Sie finden in “<https://zenodo.org/record/1254206#.XuhljbqSQ>” einen Datensatz zur Tomographie einer Walnuss, der sowohl eine bereits initialisierte Matrix entsprechend der Radontransformation, als auch die dazugehörigen Messdaten enthält. Implementieren Sie darauf aufbauend den SIRT Algorithmus. Dabei können Sie für $\|\mathcal{R}_N\|$ (Normen der Diskretisierungen) die Werte [50.027, 35.373, 25.012] für die Datensätze [82, 164, 328] verwenden. Achtung, eine höhere Anzahl an Iterationen führt nicht zwangsläufig zu besseren Ergebnissen, in der Tat für große Anzahl von Iterationen gilt das Gegenteil (weil Umkehr unstetig).