Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Aufgabe 4.1) [Fouriertransformation mit kompakten Support]
Gegeben sei $u \in L^2(\mathbb{R})\setminus\{0\}$. Zeigen Sie, dass nicht gleichzeitig $\mathrm{supp}(u)$ und $\mathrm{supp}(\hat{u})$ beschränkt sein können.

Hinweis. *Shannon-Whittaker Theorem und analytische Funktionen.*

Bemerkung. *Auf dem letzten Zettel sprachen wir davon, dass mit zunehmender Regularität die Fouriertransformierte schneller abklingt. Dieses Beispiel zeigt andererseits, dass tatsächlich nicht nur auf beschränkten Support gerechnet werden kann, was abermals bedeutet, dass durch Reduktion von Berechnungen auf kompakte Bereiche (wie in der Praxis) zwangsweise Information verloren geht.*

Aufgabe 4.2) [Reguläre temperierte Distributionen]
Es sei $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ – dies bezeichnet die Menge von Äquivalenzklassen messbarer Funktionen die fast überall gleich sind und deren Einschränkung auf eine beliebige kompakte Menge in L^1 ist. Man kann mittels

$$T_f \colon \mathcal{C}^\infty_C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad T_f(u) = \int_{\mathbb{R}} u(x) f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

eine Distribution definieren (man spricht von regulären Distributionen, welche verhältnismäßig schöne Eigenschaften besitzen).

a) Zeigen Sie, falls ein $k \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $g(x) = f(x)/(1+|x|^2)^k$ (global) integrierbar ist, so folgt, dass T_f auch eine temperierte Distribution ist, und die Integraldarstellung aus (1) auch für $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt.

b) Finden Sie ein Beispiel für $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ sodass T_f keine temperierte Distribution ist.

Hinweis. *Achtung, T_f ist als Funktional auf $\mathcal{C}^\infty_C(\mathbb{R})$ definiert. Um es als Funktional auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ zu verstehen muss man den Integral-Operator erweitern ($\mathcal{C}^\infty_C(\mathbb{R})$ ist eine dichte Teilmenge von $\mathcal{S}(\mathbb{R})$), daher entspricht im Allgemeinen T_f in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ nicht der Integraldarstellung!*

Bemerkung. *Damit sind reguläre Distributionen die nicht zu schnell ansteigende Integrale besitzen tatsächlich temperierte Distributionen (und eignen sich folglich für die Fouriertransformation).*

Aufgabe 4.3) [Diskrete und schnelle Fouriertransformation]
Für $N \in \mathbb{N}$ und $U, V \in \mathbb{C}^N$, $U = (U_0, \dots, U_{N-1})$ ist die diskrete Fouriertransformation und deren "Inverse" gegeben durch

$$\mathcal{F} \colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N \qquad\qquad \mathcal{F}^{-1} \colon \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}^N \tag{2}$$

$$(\mathcal{F}U)_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} U_k e^{-2\pi i \frac{kl}{N}} \qquad\qquad (\mathcal{F}^{-1}V)_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} V_k e^{2\pi i \frac{kl}{N}}. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, dass für die periodische Faltung $U * V$ von $U, V \in \mathbb{C}^N$ mit

$$U * V \in \mathbb{C}^N \qquad (U * V)_k = \sum_{l=0}^{N-1} U_l V_{(k-l) \bmod N} \quad \text{für } k \in \{0, \dots, N-1\} \tag{4}$$

der Faltungssatz mit komponentenweiser Multiplikation $\mathcal{F}(U * V) = \sqrt{N}(\mathcal{F}U)(\mathcal{F}V)$ gilt.

b) Zeigen Sie für N gerade und $l = 0, \dots, N/2 - 1$ die Identitäten

$$(\mathcal{F}U)_{2l} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} (U_k + U_{k+N/2}) e^{-2\pi i \frac{kl}{N/2}}, \tag{5}$$

$$(\mathcal{F}U)_{2l+1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N/2-1} e^{-2\pi i \frac{l}{N}} (U_k - U_{k+N/2}) e^{-2\pi i \frac{kl}{N/2}}. \tag{6}$$

c) Es sei $N = 2^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Leiten Sie aus (5) und (6) eine Formel zur Berechnung der Fouriertransformation eines Vektors der Länge N mittels zwei Fouriertransformationen der Länge $N/2$ ab. Folgern Sie daraus eine rekursive Berechnungsmethode und zeigen Sie, dass diese die diskrete Fouriertransformation und die periodische Faltung der Länge N in $O(N \log(N))$ elementaren Rechenschritten bewältigen kann (man spricht von Fast Fourier Transform).

Bemerkung. *Wie das Beispiel zeigt, übertragen sich viele Eigenschaften der klassischen Fouriertransformation auch auf die diskrete Fouriertransformation. Insbesondere lässt sich die schnelle Fouriertransformation in zahlreichen numerischen Methoden anwenden um den Rechenaufwand massiv zu reduzieren.*

Programmier-Aufgabe 4.4) [Segmentierte Faltung]

Es sei $M = 2^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und $N = KM$ für ein $K \in \mathbb{N}$. Es sei $U \in \mathbb{C}^N$ und $V \in \mathbb{C}^M$, wobei wir den Vektoren $U = (U_0, \dots, U_{N-1})$ mit der diskreten Funktion $(u_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ mit $u_j = U_j$ für $j \in \{0, \dots, N-1\}$, und $u_j = 0$ sonst identifizieren (analog für v und V).

Wir wollen ein Programm schreiben, welches diskrete Faltung (Achtung, nicht die periodische Faltung!) $u*v$ berechnet, und die relevanten Werte wieder in einen Vektor $U*V \in \mathbb{C}^{N+M-1}$ speichert. Dies soll in $O(N \log(M))$ wie folgt berechnet werden:

- Der Vektor U wird in K Segmente der Länge M zerlegt, d.h. $U = (\widetilde{U}_0, \dots, \widetilde{U}_{K-1})$ mit $\widetilde{U}_k \in \mathbb{C}^M$ für $k = 0, \dots, K-1$.
- Jedes Segment $\widetilde{U}_k$ wird geeignet mittels schneller Fouriertransformation mit V gefaltet.
- Die Segmente $\widetilde{U}_k * V$ werden geeignet zu $U * V$ zusammengesetzt.

a) Begründen Sie mathematisch ihre Herangehensweise und die resultierende Komplexität.

b) Implementieren Sie eine entsprechende Matlab-Funktionen und testen Sie diese wie folgt: für $N = 640$, $M = 128$ sowie $\sigma = 10$ definiere

```
U=sin([0:N-1]*pi/100)+randn(1,N)*0.1
```

```
V=1/(sqrt(2*pi)*sigma)*exp(-([0:M]-(M-1)/2).^2/(2*sigma^2))
```

Hinweis. *Sie dürfen die in Matlab definierte Funktion "fft" zur Berechnung der schnellen Fouriertransformation nutzen.*

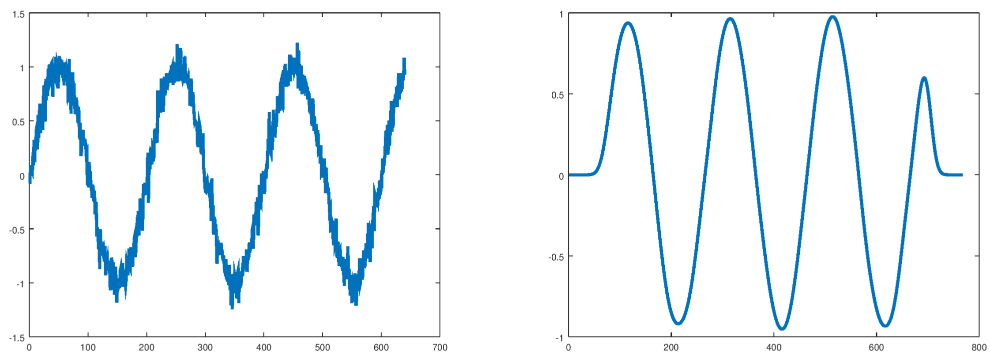

Abbildung 1: Links U, rechts durch Faltung geglättetes $U * V$.