Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Aufgabe 3.1) [Analytische Eigenschaften morphologischer Operatoren]
Es sei $B \subset \mathbb{R}^d$ ein nicht-leeres Strukturelement und es bezeichne T entweder die Erosion oder Dilatation mit B.

a) Zeigen Sie, für $L > 0$ bildet T die Menge $\{f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \mid \forall x, y \in \mathbb{R}^d: \ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \ \wedge \ \exists c > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \leq c\}$ der beschränkten Funktionen mit Lipschitz Konstante kleiner gleich L in sich selbst ab.

b) Zeigen Sie, dass im Allgemeinen T als Operation $T\colon L^\infty(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$ nicht wohldefiniert ist.

Wenn man aber Supremum und Infimum zu essentiellen Supremum beziehungsweise essentiellen Infimum ändert und B Borel-messbar mit positivem Maß ist, so erhält man $\tilde{T}\colon L^\infty(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Zeigen Sie, dass $\tilde{T}$ in der Tat wohldefiniert und nicht-expansiv bezüglich der Supremumsnorm ist (d.h. $\|\tilde{T}(u) - \tilde{T}(v)\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty$ für $u, v \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$).

Bemerkung. *Dieses Beispiel zeigt, dass Dilatation und Erosion vernünftige (nicht-lineare) Operationen in einem L^∞ Sinne sind. Die Nicht-Expansivität kann insbesondere für Fixpunktiterationen, die diese Operationen verwenden, relevant sein um Konvergenz zu garantieren.*

Aufgabe 3.2) [Erosion/Dilatation und partielle Differentialgleichung]

Es bezeichne $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^d$ und $|\cdot|_*$ die zugehörige duale Norm, sowie $tB = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |x| \leq t\}$. Für $u\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ beschränkt definiere $u^-, u^+\colon [0, \infty[\times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch

$$u^-(t,x) = (u \ominus tB)(x), \qquad u^+(t,x) = (u \oplus tB)(x) \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass:

a) Für $s, t \geq 0$ gilt $u^-(t+s, \cdot) = u^-(t, \cdot) \ominus sB$ und analog für die Dilatation u^+.

b) In Punkten $(t,x), t > 0, x \in \mathbb{R}^d$ in denen u^- bzw u^+ total differenzierbar nach x ist, gilt

$$\frac{\partial u^-}{\partial t}(t,x) = -|\nabla u^-(t,x)|_* \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{\partial u^+}{\partial t}(t,x) = |\nabla u^+(t,x)|_*. \tag{2}$$

Bemerkung. *Wie das Beispiel zeigt, besitzen die morphologische Operatoren gewisse algebraische und analytische Eigenschaften, die zeigen, wie sich mit zunehmenden Strukturelement die Erosion oder Dilatation verhält. Da die Norm abstrakt ist, lässt sich dieses Resultat von den Kugeln sB auf allgemeine konvexe beschränkte Strukturelemente, die den Ursprung im inneren enthalten, adaptieren. Man sieht insbesondere den Zusammenhang mit der klassischen Analysis, dass die stärkste Änderung einer Funktion in Richtung des Gradienten stattfindet und der dualen Norm des Gradienten entspricht.*

Aufgabe 3.3) [Langzeit-Verhalten der Fouriertransformation]
Im Folgenden betrachten wir die Fouriertransformation $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}\colon L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ gilt, also dass die Fouriertransformierte einer L^1 Funktion abklingend ist.

Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

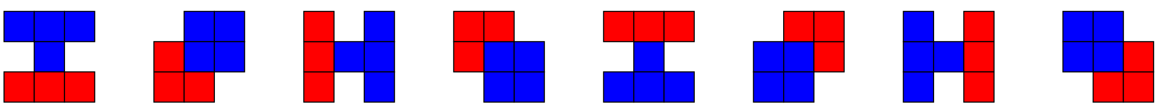
b) Zeigen Sie, dass für $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ mit $f' \in L^1(\mathbb{R})$ gilt: $|\mathcal{F}[f](s)| = O(|s|^{-1})$ für $|s| \to \infty$.

Bemerkung. *Wie das Beispiel zeigt, ist die Fouriertransformation einer $L^1(\mathbb{R})$ Funktion abklingend. Man kann zeigen, desto regulärer die Funktion, desto schneller klingt die Funktion ab. Das ist für praktische Anwendungen relevant, da in der Praxis die Fouriertransformation nur auf kompaktem Support berechnet werden kann, und damit ein Verlust an Information zu verzeichnen ist. Man sieht aber auch: desto regulärer die Funktion, desto weniger "schlimm" ist dieser Verlust.*

Programmier-Aufgabe 3.4) [Skelett-Berechnung]
Schreiben Sie eine Matlab-Funktion [imgnew]=reduce_to_skeleton(img), welche sukzessiv die Operation T auf einem gegebenen diskreten binären Bild "img" anwendet, bis ein Fixpunkt erreicht ist. Dabei gilt

$$T(U) = T_8 \circ T_7 \circ \cdots \circ T_1(U) \qquad \text{mit} \qquad T_i(U) = U \setminus (U \circledcirc (B_i, C_i)), \tag{3}$$

wobei $\circledcirc$ den Hit-or-Miss Operator entspricht und die Masken im Folgenden gegeben sind. Dabei sind Mengen B_i blau und C_i rot dargestellt. Testen Sie Ihre Implementierung an dem verlinkten Bild[1].



1 2 3 4 5 6 7 8

Bonus: Erneut gibt es zwei Bonuspunkte, wenn der Code eine sehr effiziente Implementierung darstellt. Als grobe Richtlinie: Bei mir werden 19 Iterationen durchgeführt, was ungefähr eine halbe Sekunde dauert.

[1] `https://imsc.uni-graz.at/huber/Teaching_pages/2020_blatter_Image_Processing/image3.png`