Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Aufgabe 2.1) [Berechnung eines Histogramms]
Es sei $\Omega = [0,1]^2$. Bestimmen Sie das Histogramm der Funktion

$$u\colon \Omega \to [0,1], \qquad u(x,y) = \begin{cases} x & \text{falls } (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{2})^2 \le \frac{1}{4}, \\ \frac{1}{2}\lfloor y + \frac{1}{2} \rfloor & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

bezüglich des Lesbesgue-Maßes auf Ω.

Aufgabe 2.2) [Histogramme regulärer Funktionen]
Es sei $\Omega = (0,1)^d$ und $u \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ mit $\nabla u(x) \neq 0$ für alle $x \in \Omega$. Weiters sei $E \subset \mathbb{R}$ eine abzählbare Menge und H_u das Histogramm bezüglich des Lebesgue-Maßes.

a) Zeigen Sie, dass $H_u(E) = 0$ im Fall $d = 1$.

b) Zeigen Sie, dass $H_u(E) = 0$ im Fall $d > 1$.

Hinweis. *Sie können verwenden, dass das Maß eines Graphen* $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^d \mid x \in \mathbb{R}^{d-1}\}$ *eine Funktion* $f\colon \mathbb{R}^{d-1} \to \mathbb{R}$ *gleich Null ist.*

Bemerkung. *Dieses Beispiel veranschaulicht, dass die Histogramme von Funktionen deren Ableitung nirgends verschwindet keinen diskreten Anteil besitzen, und damit die Funktion jeden Wert fast überall nicht annimmt.*

Aufgabe 2.3) [Analytische Eigenschaften der Faltung]
Es sei $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und für $p \in [1,\infty]$ sei $K\colon L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ durch $Ku = u * k$ gegeben. Es bezeichne $\rightharpoonup$ und $\to$ die schwache bzw. starke Konvergenz in L^p sowie $v_{|\Omega}$ die Einschränkung einer Funktion v auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ messbar. Zeigen Sie:

a) Es gilt $K \neq \mathrm{id}_{L^p(\mathbb{R}^d)}$,

b) Es sei $p \le \infty$, $k \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^d)$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und messbar, sowie $(u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $L^p(\mathbb{R}^d)$. Falls $u^k \rightharpoonup u$ in $L^p(\mathbb{R}^d)$ für $k \to \infty$, dann gilt $(Ku^k)_{|\Omega} \to (Ku)_{|\Omega}$ in $L^p(\Omega)$ für $k \to \infty$,

c) Es gibt ein $k \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $k \neq 0$ so dass $K : L^p(\mathbb{R}^d) \to L^p(\mathbb{R}^d)$ für jedes p nicht surjektiv ist.

Hinweis. *Verwenden Sie die Youngsche Ungleichung sowie dass die Faltung passender Funktionen stetig ist.*

Bemerkung. *Im Hintergrund liegen diese Punkte daran dass* K *(die Faltung mit* L^{p*}*) ein kompakter Operator ist. Wenn man Faltung auf Maße verallgemeinert sieht man leicht, dass Faltung mit dem Diracdelta der Identität in* L^p *entspricht.*

Aufgabe 2.4) [Separierbarkeit diskreter Filtermasken]
Analog zur "kontinuierlichen" linearen Filterung lässt sich auch eine diskrete Version definieren, d.h. für $U\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ gilt $H \circledast U_{i,j} = \sum_{k=-r}^{r} \sum_{l=-r}^{r} H_{k,l} U_{i+k,j+l}$ wobei H endlichen Support haben muss, und damit insbesondere als Matrix (Filtermaske) $H \in \mathbb{R}^{(2r+1)\times(2r+1)}$ dargestellt werden kann. Eine Maske H wird separabel genannt, falls $H = F \otimes G$ d.h. $H_{ij} = F_i G_j$ für eindimensionale Filtermasken $F, G \in \mathbb{R}^{2r+1}$.

a) Geben Sie ein Verfahren an welches für ein $H \in \mathbb{R}^{(2r+1)\times(2r+1)}$ ein $n \in \mathbb{N}_0$ und separable Filtermasken $H_1, \dots, H_n$ berechnet, so dass

$$H = H_1 + H_2 + \cdots + H_n \tag{2}$$

gilt und n **minimal** gilt.

b) Bestimmen Sie den Rechenaufwand (Anzahl an Multiplikationen und Additionen) zur "naiven" Berechnung der Filterung mit $H \in \mathbb{R}^{(2r+1)\times(2r+1)}$ in einem Punkt (i, j). Zeigen Sie, dass für separables H diese Berechnung in $(4r + 2)$ Multiplikationen und Additionen durchführbar ist, und folgern Sie den Rechenaufwand der Faltung mittels Zerlegung in a) in Abhängigkeit von n (der Rechenaufwand des Zerlegens soll nicht berücksichtigt werden).

Bemerkung. *Wie Punkt b) zeigt, lässt sich durch Separieren der Rechenaufwand der Filterung signifikant reduzieren, falls die Matrix H niedrigen Rang hat. Zwar ist auch das Zerlegen mit einem gewissen Rechenaufwand verbunden, dieser muss aber nur einmal durchgeführt werden, während die Zerlegung dann einen Vorteil bei der Berechnung jedes Pixels liefert.*

Programmier-Aufgabe 2.5) [Isodata Segmentierung]
Es sei $U\colon \{0, \dots, N\} \times \{0, \dots, M\} \to \{0, \dots, S\}$ ein diskretes Bild mit diskretem Wertebereich zwischen 0 und $S \in \mathbb{N}$. Ein Verfahren um U in ein Schwarz-Weiß Bild $\tilde{U}$ zu transformieren (zu segmentieren) ist thresholding, wobei für einen Schwellwert (threshold) s_0 gilt $\tilde{U}(x) = 1$ falls $U(x) > s_0$ und $\tilde{U}(x) = 0$ falls $U(x) \leq s_0$. Eine klassische Wahl dieses Schwellwerts ist, s_0 so zu wählen, dass

$$s_o = F(s_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\int_{[0,s_0[} s \, \mathrm{d}H_U}{\int_{[0,s_0[} 1 \, \mathrm{d}H_U} + \frac{\int_{[s_0,S]} s \, \mathrm{d}H_U}{\int_{[s_0,S]} 1 \, \mathrm{d}H_U} \right), \tag{3}$$

wobei der Fall $s_0 = S$ das rechte Integral als S verstanden wird, auch im Fall 0/0.

Schreiben Sie ein Programm, welches eine automatische Schwellwertwahl anhand der Fixpunktiteration $s_0^{n+1} = F(s_0^n)$ berechnet, und anschließende Segmentierung anhand Schwellwertbildung durchführt. Testen Sie dieses Programm anhand des Bildes barcode.png 1[1].

[1]Photo by Nick Richards, licenced under CC BY-SA 2.0.