Motivation:
Die Lipschitzstetigkeit spielt eine Schlüsselrolle für die Eindeutigkeit der Lösungen von Anfangswertproblemen. Es ist in der Tat eine zentrale Bedingung in den Theoremen, die die globale (bzw. lokale) Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für eine gegebene Anfangsbedingung garantieren.
Def. 1 Sei $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$.

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ heißt Lipschitz-stetig bzgl. y mit Lipschitz-konstante $L \geq 0$, falls
$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\| \quad \forall (x, y_1) \in D, \forall (x, y_2) \in D. \tag{1}$$
2. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}^n$ heißt lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf D, falls es zu jedem $(x_0, y_0) \in D$ eine Umgebung $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ gibt, sodass $f|_{D \cap U}$ Lipschitz-stetig bzgl. y mit einer von U abhängigen Lipschitz-konstante $L_U \geq 0$ ist, d.h.
$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L_U\|y_1 - y_2\| \quad \forall (x, y_1) \in D \cap U, \forall (x, y_2) \in D \cap U. \tag{2}$$

Aufgabe 9.1) [Mittelwertsatz und Lipschitzstetigkeit in $\mathbb{R}$]
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a < b$, eine differenzierbare Funktion auf den Intervall $[a, b]$. Der Mittelwertsatz besagt, dass $f(a) - f(b) = f'(c)(a - b)$ für ein $c \in (a, b)$.

a) Sei $f(x)$ differenzierbar mit $|f'(x)| \leq L$ für $x \in [a, b]$ und eine Kostante $L \geq 0$. Verwenden Sie den Mittelwertsatz, um zu zeigen, dass
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall\, a \leq x_1, x_2 \leq b. \tag{3}$$

Aufgabe 9.2) [Kriterien für Lipschitzstetigkeit in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$]

a) Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ konvex (d.h. $\forall\, a, b \in D,\ \forall\, \lambda \in [0, 1],\ \lambda a + (1 - \lambda)b \in D$). Sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ sodass $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$, $\forall\, i, j = 1, 2, .., n$ existieren, und stetig und beschränkt sind. Beweisen Sie, dass f Lipschitz-stetig bzgl. y auf D ist.
Hinweis: Betrachten Sie zuerst die Lipschitzstetigkeit der Komponenten f_i, und dann die entsprechende $\|\cdot\|_\infty$ Norm.
Hinweis: Der Mittelwertsatz besagt, dass, wenn G eine konvexe Teilmenge von $\mathbb{R}^m$ ist, und $g : G \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann $\forall\, \underline{a}, \underline{b} \in G$, $g(\underline{a}) - g(\underline{b}) = \langle \nabla g(\underline{\xi}), \underline{a} - \underline{b}\rangle = \sum_{j=1}^m \frac{\partial g}{\partial y_j}(\underline{\xi})(a_j - b_j)$ für ein $\underline{\xi} \in [\underline{a}, \underline{b}] = \{t\underline{a} + (1 - t)\underline{b} : t \in [0, 1]\} \subset G$.

b) Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, sei $f : D \to \mathbb{R}^n$ eine stetig differenzierbare Funktion, d.h. insbesondere $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ stetig $\forall\, i, j = 1, 2, .., n$. Beweisen Sie, dass f lokal Lipschitz-stetig bzgl. y auf D ist.
Hinweis: Die Umgebung $U \subset D$ von der Definition 1.2 kann immer zusammenhängend konvex und beschränkt gewählt werden. Dann begründen Sie, dass alle partiellen Ableitungen von f auf U beschränkt sind und man kann Punkt a) anwenden.

Aufgabe 9.3) [Beispiele von Funktionen, die Lipschitz-stetig (bzw. lokal Lipschitz-stetig) sind]
Bestimmen Sie mit Hilfe der oben genannten Kriterien, ob die folgenden Funktionen Lipschitz-stetig (bzw. lokal Lipschitz-stetig) bzgl. y sind.

a) $f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$.

b) $f(x,y) = \arctan(y) + x^2 y$.

c) $f(x,y) = |y|^\alpha,\ \alpha > 0$.

Aufgabe 9.4) [Beispiele von Funktionen, die nicht Lipschitz-stetig sind]
Sei $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, sei $\underline{f} : D \to \mathbb{R}^n$ stetig, aber nicht zwangsläufig Lipschitz-stetig. Seien $(x_0, \underline{y_0}) \in D$. Dann besitzt das AWP

$$\begin{cases} \underline{y}' = f(x, \underline{y}) \\ \underline{y}(x_0) = \underline{y_0} \end{cases} \tag{4}$$

mindestens eine Lösung auf einer Umgebung von x_0.

a) Betrachten Sie das AWP

$$\begin{cases} y'(x) = (y(x))^{1/3} \\ y(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Bestimmen Sie, auf welchem Gebiet die Funktion $f(x,y) = y^{1/3}$ stetig ist, prüfen Sie, dass sie in keinem Gebiet $S = [-a,a] \times [-a,a]$ Lipschitz-stetig ist, wobei $a > 0$, und finden Sie jede Lösung y des AWPs.
Hinweis: Die Lösung kann auch bis zu einem Zeitpunkt $\tilde{x}$ Null bleiben, und dann ungleich Null werden.