Motivation: Bis jetzt haben wir uns mit Differentialgleichungen mit einer unbekannten Funktion, also von der Form

$$x^{(m)} = f(t, x, x', \dots, x^{(m-1)}) \tag{1}$$

mit Ordnung m für $x\colon [t_0, T) \to \mathbb{R}$ beschäftigt. Dies lässt sich allerdings verallgemeinern, wenn man nicht nur eine unbekannte Funktion, sondern einen Vektor unbekannter Funktionen $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_d)\colon [t_0, T) \to \mathbb{R}^d$ betrachtet, und eine Differentialgleichung

$$\vec{x}\,' = f(t, \vec{x}), \tag{2}$$

wobei $\vec{x}' = (x_1', \dots, x_d')$ der komponentenweisen Ableitung entspricht (wir haben nach wie vor nur eine unabhängige Variable t). Solch eine Differentialgleichung nennt man ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Wir nennen erneut das Systems autonom, wenn es nicht explizit von t abhängt, und linear falls $\vec{x}' = A(t)\vec{x}$ für eine Funktion $A\colon [t_0, T) \to \mathbb{R}^{m\times m}$ gilt.

Aufgabe 8.1) [Phasenportraits der Konkurrenz]

Wir wollen uns das Phasenportrait eines autonomen Systems (2) mit $d = 2$ (also 2 abhängigen Variablen, im Folgenden mit x und y bezeichnet) ansehen. Das heißt, man betrachtet eine Grafik mit x und y Achsen und mit einer Menge von Punkten auf einem gleichmäßigen Gitter. In jedem dieser Gitterpunkte $\vec{x}_{ij}$ zeichnet man einen Pfeil von dem Punkt ausgehend in Richtung $f(\vec{x}_{ij})$. Die resultierende Grafik wird als Phasenportrait bezeichnet, und erlaubt Einsicht in das Verhalten einer Lösung der Differentialgleichung, denn die Pfeile veranschaulichen den Fluss der Lösung der Differentialgleichung, das heißt, eine Lösung bewegt sich stets entlang der Richtung dieser Pfeile, man spricht auch von den Trajektorien der Differentialgleichung, siehe Abbildung 1. Viele der numerischen Lösungsverfahren für Differentialgleichungen basieren auf dem Folgen dieser Trajektorien.

Allerdings ist solch ein Phasenportrait händisch mühsam zu zeichnen (mit Matlab kein Problem, siehe “quiver”), weshalb wir uns hier auf einen “reduziertes” Phasenportrait einschränken, dass wie folgt funktioniert. Bestimme zunächst die Mengen $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x, y) = 0 \vee f_2(x, y) = 0\}$ (f_1, f_2 Komponenten von f), sowie die stationären Punkte $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = (0, 0)\}$. Zeichnen Sie die Kurven, die M darstellen und die stationären Punkte S in Ihrem Graphen ein. Zerlegen Sie weiters M in zusammenhängende Teile, die durch stationäre Punkte getrennt sind. Durch diese Kurven wird der Graph in mehrere Gebiete geteilt, und in jedem Gebiet liegt f in einem Quadranten (links oben, links unten, rechts oben oder rechts unten). Zeichnen Sie in die Gebiete jeweils einen entsprechenden Pfeil. Analog kann entlang einer Zusammenhangskomponenten von M der Vektor f nur konstant nach rechts, links, oben oder unten zeigen, zeichnen Sie ebenfalls entsprechende Pfeile auf die Kurven. Siehe Abbildung 1 für Phasenportraits des Räuber-Beute Systems für gewisse Parameter $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (2, 7, 3, 5)$.

Wenn die Lösung in einem Gebiet mit Pfeil nach links unten ist, kann sich die Lösung nur in einer Kurve, die links oder unterhalb an das Gebiet grenzt, bewegen, und von dieser lediglich in die Gebiete in der der Pfeil der Kurve zeigt(oder auf der Kurve falls diese in genau die selbe Richtung wie der Pfeil zeigt) und so weiter. Wenn man also in Abbildung 1 im Gebiet links oben ist, kann man entweder an den linken Rand (x=0, also Beute sind ausgestorben) oder an den unteren Rand stoßen. Ersterer Fall ist nicht möglich (was aber aus der Grafik

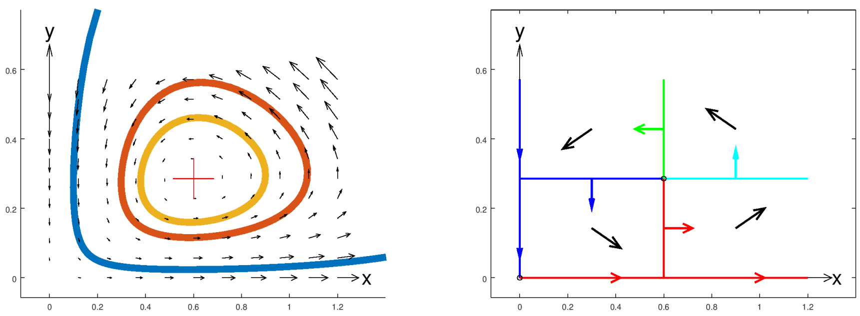

Abbildung 1: Phasenportrait des Räuber-Beute Systems, links das “vollständige” Portrait mit verschiedenen drei Trajektorien eingezeichnet, rechts das “reduzierte” Portrait mit farblich unterschiedenen Teilen von M und stationäre Punkte als Kreise.

nicht ersichtlich ist), wenn wir auf $y = 0$ sind, bewegen wir uns gerade nach unten zum Punkt $(0, 0)$, also konvergieren wir gegen (0,0), was Räuber und Beute sind ausgestorben entspricht. Im zweiterem Fall kommen wir in das Gebiet links unten usw., wir könnten uns durch analoge Überlegung ewig lange im Kreis drehen (Koexistenz) (was tatsächlich so passiert), oder irgendwann an die Achsen stoßen (was zu Aussterben beider Spezies oder Aussterben der Räuber führt).

Wir betrachten nun das System der konkurrierenden Spezies (gewisse Analogie zu Räuber-Beute), welches zwei Spezies betrachtet, die um begrenzte Ressourcen kämpfen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} (c - ax - by)x \\ (\gamma - \alpha x - \beta y)y \end{pmatrix} = f(x, y), \qquad \text{mit } 0 \leq x \leq \max\left(\frac{c}{a}, \frac{\gamma}{\alpha}\right), \ 0 \leq y \leq \max\left(\frac{c}{b}, \frac{\gamma}{\beta}\right) \tag{3}$$

für Konstanten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma > 0$ und abhängige Variablen x, y (Population der Spezies 1 bzw. Spezies 2).

Zeichnen Sie das “reduzierte” Phasenportrait und folgern Sie, wohin für $t \to \infty$ die Lösung abhängig von Anfangswerten $x_0 \geq 0$ und $y_0 \geq 0$ konvergiert (also wo die Trajektorie hinführt) und interpretieren Sie diesen Grenzwert (d.h. ob es zu Koexistenz oder Aussterben/Dominanz einer Spezies kommt):

a) für $a = 2$, $b = 4$, $c = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$.

b) für $a = 4$, $b = 2$, $c = 5$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$.

Aufgabe 8.2) [Lineare Systeme von Differentialgleichungen]
Man nennt ein System von Differentialgleichungen ein (homogenes) lineares System (mit konstantem Koeffizienten) falls es die Form

$$\vec{x}' = A\vec{x} \qquad \text{mit } \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \tag{4}$$

für eine (konstante) Matrix $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^d$ und $x_0 \in \mathbb{R}^d$ Anfangswert, hat. Wir nehmen im Folgenden an, dass die Matrix A diagonalisierbar ist, d.h. es gilt $A = UDU^{-1}$ für eine reguläre Matrix $U \in \mathbb{C}^{d\times d}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{d\times d}$ mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$

von A. Dies gilt beispielsweise für normale oder symmetrische Matrizen. **Hinweis:** Lassen Sie sich von dem Auftauchen komplexer Zahlen nicht stören, es gelten die gleichen Prinzipien wie für reellwertige Differentialgleichungen.

a) Es bezeichne $\operatorname{diag}(\mu_1, \dots, \mu_d)$ die Diagonalmatrix mit Einträgen $\mu_1, \dots, \mu_d$. Zeigen Sie, dass

$$\vec{x}(t) = U \operatorname{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_d t}) U^{-1} \vec{x}(0) \tag{5}$$

eine Lösung der Gleichung (4) ist. **Hinweis:** Beim Differenzieren von Matrixprodukten können Sie vorne stehende konstante Matrizen vorne und hinten stehende hinten rausziehen (Achtung, die Reihenfolge ist wichtig!).

b) Wenden Sie (5) an, um die Lösung von

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{mit } x_1(0) = 1,\ x_2(0) = 2 \tag{6}$$

zu bestimmen.

Hinweis: Um U und D konkret zu bestimmen, betrachtet man (im zweidimensionalen Fall) die Nullstellen λ_1 und λ_2 des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - cb$ (für eine Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$) welche den Diagonaleinträgen von D (Eigenwerte) entsprechen. Man bestimme v_i, sodass $(A - \lambda_i I)v_i = 0$ und $\|v_i\| = 1$ für $i = 1, 2$. Dann ist $U = [v_1, v_2]$ (also nebeneinander). In Beispiel b) ist A normal, und daher U unitär, d.h. $U^{-1} = U^*$ (komplex Adjungierte, also Zahlen komplex konjugieren und dann Matrix transponieren).

Aufgabe 8.3) [Lineare Differentialgleichungen als Systeme]
Wie in der Vorlesung gezeigt, gibt es zu jeder Differentialgleichung von Ordnung m ein äquivalentes System erster Ordnung mit Dimension m. Wir betrachten im Folgenden eine lineare autonome Differentialgleichung der Ordnung m, d.h. für Konstanten $a_0, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{R}$ gilt

$$x^{(m)} = \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^{(i)}. \tag{7}$$

a) Zeigen Sie, dass diese Differentialgleichung äquivalent zu einem linearen autonomen System von Differentialgleichungen ist, also $\vec{x}' = A\vec{x}$ für $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ (die "Systemmatrix") und bestimmen Sie diese.

b) Es seien $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ paarweise verschiedene Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\lambda) = \lambda^m - \sum_{i=0}^{m-1} a_i \lambda^i$. Zeigen Sie, dass für jedes $i = 1, \dots, m$ der Vektor $v_i = [1, \lambda_i, \lambda_i^2, \dots, \lambda_i^{m-1}]$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_i ist, d.h. $Av_i = \lambda_i v_i$.

c) Wenn die λ_i paarweise verschieden sind, so ist die Matrix A diagonalisierbar mit $U = [v_1, \dots, v_m]$ und $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. Nutzen Sie (5) (Sie benötigen nur das Ergebnis der ersten Komponente) zusammen mit $U^{-1}\vec{x}(0) = \vec{c}$ mit $\vec{c} = [c_1, \dots, c_m]$ (beliebiger Konstantenvektor), um zu folgern, dass $x(t) = \sum_{i=1}^{m} c_i e^{\lambda_i t}$ eine Lösung der Differentialgleichung (7) ist.