Motivation: In dieser Einheit betrachten wir spezielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung. Diese DGL werden als speziell bezeichnet, wenn entweder die Funktion oder ihre erste Ableitung oder die unabhängige Variable nicht explizit in der Gleichung erscheint. In diesen Fällen kann die Gleichung zweiter Ordnung in eine Gleichung erster Ordnung für eine neue Funktion umgewandelt werden. Je nach Fall wird dafür eine unterschiedliche Transformation benötigt. Durch Lösen der resultierenden Gleichung erster Ordnung und Rücktransformation erhält man eine weitere Differentialgleichung 1. Ordnung der ursprünglich gesuchten Funktion.

Aufgabe 7.1) [Spezielle DGL der zweiten Ordnung $y'' = f(x, y')$]
Wir betrachten Anfangswertprobleme vom Typ

$$\begin{cases} y''(x) = f\big(x, y'(x)\big), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = u_0, \end{cases} \tag{1}$$

für eine Funktion $f\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für ein Gebiet Ω, die nur von (x, y') abhängt. Man kann Problem (1) in zwei DGL der ersten Ordnung transformieren. Zuerst kann man eine Funktion $u(x) := y'(x)$ setzen. Man erhält dann ein AWP für u zu lösen, d.h. $u'(x) = f(x, u)$, sodass $u(x_0) = u_0$. Mit der Lösung u kann man dann das AWP $y'(x) = u(x)$, mit $y(x_0) = y_0$ lösen, um die Lösung $y(x)$ von (1) zu bestimmen.

a) Lösen Sie das AWP

$$\begin{cases} y''(x) = -\dfrac{x-1}{x}(y')^2 + \dfrac{y'}{x}, \\ y(2) = -2,\ y'(2) = 4. \end{cases} \tag{2}$$

Aufgabe 7.2) [Spezielle DGL der zweiten Ordnung $y'' = f(y, y')$]
Wir betrachten Anfangswertprobleme vom Typ

$$\begin{cases} y''(x) = f\big(y(x), y'(x)\big), \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{3}$$

für eine Funktion $f\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für ein Gebiet Ω, die nur von (y, y') abhängt. Nimmt man an, dass die Lösung y auf einem Intervall streng monoton ist, so gibt es eine lokale Umkehrfunktion von y. Dann kann man Problem (3) in zwei DGL der ersten Ordnung transformieren. Zuerst kann man eine Funktion $w(y) := u\big(x(y)\big)$ (lokal wohldefiniert) setzen, wobei $u(x) = y'(x)$. Man erhält dann eine erste DGL zu lösen, d.h. $\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}y} w = f(y, w)$, sodass $w(y_0) = y_1$. Dann kann man das AWP $y'(x) = w(y(x))$ (durch Trennung der Variablen) lösen, mit $y(x_0) = y_0$, um die Lösung $y(x)$ von (3) zu bestimmen. Bemerkung: Man findet die Lösung von x_0 bis X, wobei X gewählt ist, sodass y auf (x_0, X) streng monoton ist.

a) Lösen Sie das AWP

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{(y')^2}{2y}(1 - \sqrt{y}), \\ y(e) = 1,\ y'(e) = \frac{2}{e}. \end{cases} \tag{4}$$

b) Lösen Sie das AWP

$$\begin{cases} y''(x) = \dfrac{1+(y')^2}{2y}, \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

Aufgabe 7.3) [Spezielle DGL der zweiten Ordnung $y'' = f(y)$]
Wir betrachten nun den Fall, in dem sowohl die Variable x als auch die Funktion y' nicht explizit in der Gleichung vorkommen. Dieser Fall ist wichtig für die Newtonsche Mechanik. Aus diesem Grund ändern wir die Notation, mit der wir die Differentialgleichung schreiben, leicht. Anstatt die Gleichung als $y'' = f(y)$ zu schreiben, schreiben wir sie als $my'' = f(y)$, wobei m eine Konstante ist. Diese Gleichung entspricht dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetzes für ein Teilchen der Masse m, mit der Ortsfunktion y als Funktion der Zeit t (hier betrachten wir t statt x) als unabhängige Variable, auf die eine Kraft f wirkt, die nur von der Teilchenposition y abhängt. Diese Gleichung kann auch als ein System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung (Hamiltonisches System) umformuliert werden, um gelöst zu werden. Seien jetzt die Anfangsbedingungen $y(t_0) = y_0$ und $y'(t_0) = v_0$ gegeben, sei $f(y)$ die auf das Teilchen an der Position y wirkende Kraft. Dann erfüllt die Positionsfunktion y

$$\frac{1}{2} m\, v^2 + V(y) = E_0, \tag{6}$$

wobei E_0 die Energie zum Zeitpunkt t_0 ist, $v = y'(t)$ die Teilchengeschwindigkeit ist, und V das Potential der Kraft f - d.h. das Negative einer Stammfunktion von f ist, also $V(y) = -\int f(y)\,\mathrm{d}y$.
Der Term $K(v) := \frac{1}{2} m\, v^2$ ist die kinetische Energie des Teilchens und $V(y)$ ist die potentielle Energie unter dem gegebenen Kraftfeld.
Die Gleichung (6) sagt, dass die gesamte mechanische Energie $E(v) = K(v) + V(y)$ während der Bewegung des Teilchens konstant bleibt (Energieerhaltungssatz). Die Energie wird auch als Hamilton-Funktion des Systems bezeichnet und geschrieben als H.
Finden Sie die potenzielle Energie und schreiben Sie die Energieerhaltung für die folgenden Systeme:

a) Ein an einer Feder mit der Konstanten k befestigtes Teilchen im schwerelosen Raum, das sich in einer Raumdimension bewegt.
Hinweis $f(y) = -ky$.

b) Ein Teilchen, das sich unter der konstanten Erdbeschleunigung in vertikaler Richtung nahe der Erdoberfläche bewegt. In diesem Fall ist die Kraft auf das Teilchen mit der Masse m gegeben $mf(y) = -m\,g$, wobei $g = 9,81\frac{m}{s^2}$ ist.

c) Ein Teilchen der Masse m, das sich in Entfernung y zur Oberfläche eines kugelförmigen Planeten mit Masse M und Radius R befindet, und auf dass die Gravitationskraft dieses Planeten wirkt.
Hinweis $f(y) = -\frac{G\,M\,m}{(R+y)^2}$.