Motivation: Die in der Vorlesung präsentierte Trennung der Variablen erfordert die Inversion einer der berechneten Stammfunktionen, welche aber im Allgemeinen nicht möglich ist – d.h. man kann die resultierende Gleichung nicht auf die abhängige Variable umformen – daher kann man nicht immer $y = y(x)$ explizit bestimmen. Dennoch erlaubt die Trennung der Variablen, oder allgemeiner exakte Differentialgleichungen, das Aufstellen einer Gleichung $F(x, y(x)) = c$ für eine Funktion $F: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Konstante $c \in \mathbb{R}$, wobei $y(x)$ die (unbekannte) Lösung der Differentialgleichung bezeichnet, man spricht von der impliziten Darstellung der Lösungen. Mittels dem Satz der impliziten Funktionen gibt es unter moderaten Annahmen tatsächlich Funktionen $y(x)$ die die implizite Darstellung erfüllen, obgleich sich diese oft nicht mit elementaren Funktionen darstellen lassen. Aber auch ohne der expliziten Darstellung gewährt die implizite Darstellung oft Informationen über das Verhalten von Lösungen.

Aufgabe 6.1) [Exakte quasi-lineare Differentialgleichung]
Wir betrachten Differentialgleichungen vom Typ

$$N(x, y)y' + M(x, y) = 0, \tag{1}$$

für Funktionen $N, M: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, für ein Gebiet Ω, wir sprechen von quasi-linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. Man würde gerne eine Funktion $F: \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sodass

$$F(x, y(x)) = c, \quad c \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

finden, wobei $y(x)$ die Lösung bezeichnet. Falls solch eine Darstellung existiert, gilt gemäß der Kettenregel $\frac{d}{dx}[F(x, y(x))] = F_{\mathbf{y}}(x, y(x))y' + F_{\mathbf{x}}(x, y(x)) = 0$ wobei $F_{\mathbf{x}}$ und $F_{\mathbf{y}}$ die partiellen Ableitungen nach der 1. bzw. 2. Variable von F bezeichnet. Insbesondere gilt $F_{\mathbf{y}}(x, y(x))y' + F_{\mathbf{x}}(x, y(x)) = 0 = N(x, y(x))y' + M(x, y(x))$, was aber nicht zwangsläufig heißt, dass

$$N = F_{\mathbf{y}} \qquad \text{und} \qquad M = F_{\mathbf{x}}. \tag{3}$$

Wenn es F gibt, sodass dies gilt, so nennt man die Differentialgleichung exakt, und dies erlaubt einen Ansatz um die Funktion F zu bestimmen. Wir betrachten konkret die Differentialgleichung

$$\big(x^2 \cos(xy) + 1\big)y' + 2x + \sin(xy) + xy\cos(xy) = 0. \tag{4}$$

- **a)** Bestimmen Sie die implizite Darstellung der Lösung von (4) unter der Annahme der Exaktheit, also mit dem Ansatz F sodass (3).
  Hinweis: Es gilt $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int F_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\, d\mathbf{y} + c(\mathbf{x})$, also Integration nach $\mathbf{y}$ gibt die Funktion mit einer Konstante (die aber noch von $\mathbf{x}$ abhängen kann). Durch Ableiten der resultierenden Funktion F nach $\mathbf{x}$ lässt sich auch $c(\mathbf{x})$ bis auf eine Konstante bestimmen.
- **b)** Überprüfen Sie, dass $N_{\mathbf{x}} = M_{\mathbf{y}}$, was die partiellen Ableitungen nach $\mathbf{x}$ bzw. $\mathbf{y}$ bezeichnet, für das konkrete Beispiel (4), und begründen Sie warum diese Tatsache allgemein für exakte Differentialgleichungen der Form (1) folgt, falls N und M stetig differenzierbar sind.

Bemerkung. *Man kann unter sehr milden Annahmen (mittels dem Lemma von Poincaré) zeigen, dass falls $N_{\mathbf{x}} = M_{\mathbf{y}}$, so gibt es eine Funktion F welche die Lösung implizit darstellt und (3) erfüllt.*

Aufgabe 6.2) [Exakte quasi-lineare Differentialgleichung]
Lösen Sie (explizit) das AWP

$$\begin{cases} y' = \frac{x+\cos(y)}{x\,\sin(y)}, \\ y(1) = \pi/2. \end{cases} \tag{5}$$

Hinweis: Um die eindeutige Lösung von (5) zu bestimmen, bestimmen Sie die Funktion F sodass die Gleichung (2) gilt, und betrachten Sie das Anfangswert um die beliebige Kostante $c \in \mathbb{R}$ zu bestimmen (also lösen Sie die Gleichung (2) für $(x_0, y(x_0))$).

Aufgabe 6.3) [Nicht exakte quasi-lineare Differentialgleichung]
Wenn die DGL (1) nicht exakt ist, kann man prüfen, ob es eine Funktion $m : \Omega \to \mathbb{R}^*$ gibt, sodass die DGL

$$m(x,y)N(x,y)y' + m(x,y)M(x,y) = 0 \tag{6}$$

exakt ist. Wenn (6) gilt, wird die Funktion m *integrierender Faktor* genannt.
In diesem Fall, um die gegebene DGL zu lösen, soll man einen integrierenden Faktor m finden, und die äquivalente DGL von der Form (6) lösen, um eine implizite Darstellung der Lösen zu erhalten, wie Sie in der Vorlesung gesehen haben.
Es gibt Sonderfälle, in denen man direkt einen integrierenden Faktor berechnen kann. Zum Beispiel, wenn der Ausdruck $h := 1/N(M_{\mathbf{y}} - N_{\mathbf{x}})$ wohldefiniert und unabhängig von $\mathbf{x}$ ist, ist $m(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \exp(\int h(\mathbf{x})\mathrm{d}\mathbf{x})$ integrierender Faktor und, wenn der Ausdruck $g := 1/M(N_{\mathbf{x}} - M_{\mathbf{y}})$ wohldefiniert und unabhängig von $\mathbf{y}$ ist, ist $m(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \exp(\int g(\mathbf{y})\mathrm{d}\mathbf{y})$ integrierender Faktor.

a) Bestimmen Sie die implizite Darstellung der Lösung von

$$3x^2y + 2xy + y^3 + (x^2 + y^2)y' = 0. \tag{7}$$

b) Bestimmen Sie die implizite Darstellung der Lösung von

$$6xy + 5(x^2 + y)y' = 0, \tag{8}$$

für $y \in \mathbb{R}^+$.

c) Bestimmen Sie die implizite Darstellung der Lösung von

$$2y\,y' + y^2 - x = 0. \tag{9}$$