Motivation: In dieser Einheit sehen wir zusätzliche Archetypen von Differentialgleichungen, für die man eine klare Lösungstrategie hat. Auch hier, besteht die Strategie in der Umwandlung der gegebenen Differentialgleichung in eine neue Gleichung, die man lösen kann. Dazu werden Variablentransformationen verwendet, also man betrachtet statt $x(t)$ Lösung von $x'(t) = f(t, x(t))$ ein $u(t) = u(t, x(t))$ und die zugehörige Differentialgleichung (z.B. eine separierbare Differentialgleichung). Die in der Vorlesung präsentierte Trennung der Variablen erfordert die Inversion einer der berechneten Stammfunktionen, welche aber im Allgemeinen nicht möglich ist – d.h. man kann die resultierende Gleichung nicht auf die abhängige Variable umformen – daher kann man nicht immer $y = y(x)$ explizit bestimmen. Dennoch erlaubt die Trennung der Variablen das Aufstellen einer Gleichung $F(x, y(x)) = c$ für eine Funktion $F\colon \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und Konstante $c \in \mathbb{R}$, wobei $y(x)$ die (unbekannte) Lösung der Differentialgleichung bezeichnet, man spricht von der impliziten Darstellung der Lösungen.

Aufgabe 5.1) [Transformation affiner Funktionen]
Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form

$$x' = f\,(at + bx + c) \quad \text{für Konstanten } a, b, c \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

also die innere Funktion ist affin in (t, x). Um diese DGL zu lösen, kann man eine Funktion $u(t) := at + bx + c$ einsetzen. Falls $x(t)$ Lösung von (1) ist, dann ist $u(t)$ Lösung von $u'(t) = a + bx'(t) = a + bf(u(t))$. Diese neue DGL kann mit Trennung der Variablen gelöst werden. Die Lösung von (1) ist dann $x(t) = b^{-1}(u(t) - c - at)$.

a) Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP):

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - t}{x - t - 1} \\ x(0) = 2. \end{cases} \tag{2}$$

Aufgabe 5.2) [(Euler) homogener Differentialgleichungen]
Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form

$$x' = f\left(\frac{x(t)}{t}\right). \tag{3}$$

Um diese DGL zu lösen, kann man eine Funktion $u(t) := \frac{x(t)}{t}$ einsetzen. Falls $x(t)$ Lösung von (3) ist, dann ist $u(t)$ Lösung von $u'(t) = \frac{x'(t)}{t} - \frac{x(t)}{t^2} = \frac{1}{t}\left(f(u(t)) - u(t)\right)$. Diese neue DGL kann mit Trennung der Variablen gelöst werden. Die Lösung von (3) ist dann $x(t) = t\,u(t)$.

a) Lösen Sie die DGL

$$tx + x^2 + t^2 - t^2x' = 0. \tag{4}$$

b) Lösen Sie die DGL

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y^2 - x^2}{2xy} \\ y(1) = 2. \end{cases} \tag{5}$$

Aufgabe 5.3) [Transformation rationaler Funktionen]
Wir betrachten eine Differentialgleichung der Form $x' = f\left(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}\right)$ für Konstanten $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, also die innere Funktion ist rational erster Ordnung. In Abhängigkeit der Konstanten und insbesondere der Matrix $M = \begin{pmatrix} a & b \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$ ist unterschiedliches Vorgehen notwendig, um die Differentialgleichung zu bearbeiten.
Es sei die Determinante von M ungleich Null (also die Matrix regulär), und es sei t_0, x_0 sodass $M \begin{pmatrix} x_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c \\ \gamma \end{pmatrix}$. Dann kann man durch eine Transformation $s = t - t_0$ und $u(s) = x(t) - x_0$ eine Differentialgleichung bestimmen, die von $u(s)$ erfüllt wird, also $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} = g(s, u(s))$. Als Folge kann man durch eine weiter Transformation $z = \frac{u}{s}$ eine separierbare Differentialgleichung für z erhälten.
Andernfalls sei es M singulär aber $a, b \neq 0$. In diesem Fall kann man zeigen, dass die Differentialgleichung von der Form $x' = \tilde{f}(at + bx)$ für eine Funktion $\tilde{f}$, also mit innerer affine linearer Funktion, ist.

a) Finden Sie die implizite Darstellung der Lösung von $x' = \frac{3x-t+2}{x+3t+4}$.
Hinweis: Es gilt $\int \frac{1}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \arctan(z)$ und $\int \frac{z}{z^2+1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\ln(z^2+1)$.

b) Finden Sie die implizite Darstellung der Lösung von $x' = \frac{x-2t+5}{3x-6t}$.
Hinweis: In dieser Übung können Sie entweder die Lösung $x(t)$ implizit stehen lassen, oder die Funktion Produktlogarithmus (oder Lambert W-Funktion) benutzen, um die explizite Lösung $x(t)$ zu bestimmen.
Diese Funktion ist die Umkehrfunktion von $f : x \mapsto x\exp(x), \forall x \in \mathbb{C}$.