Motivation: Es gibt einige Architypen von Differentialgleichungen, für die man eine relativ klare Lösungsstrategie hat, beispielsweise separierbare oder lineare Differentialgleichungen. Daher besteht eine mögliche Herangehensweise zur Lösung einer gegebenen Differentialgleichung darin, die Gleichung auf ein Problem umzuschreiben, dass man lösen kann. Dazu werden klassischerweise Transformationen verwendet, also man betrachtet statt x mit $x'(t) = f(t, x(t))$ ein $y = y(t, x(t))$ und die zugehörige Differentialgleichung. Beispielsweise hat man eine Differentialgleichung vom Typ $x' = f(t, \frac{x(t)}{t})$, durch Transformation $y(t) = \frac{x(t)}{t}$ ergibt sich – unter Nutzung der Quotientenregel – die Differentialgleichung $y' = \frac{f(t,y)-y}{t}$ mit der man eventuell weiterarbeiten kann.

Aufgabe 4.1) [Lineare Differentialgleichung erster Ordnung]
Eine Differentialgleichung vom Typ $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ für $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$ mit stetigen Funktionen $a, b\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ wird lineare Differentialgleichung erster Ordnung genannt.

a) Nutzen Sie die Transformation $y(t) = x(t)e^{-\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau}$ um eine separable Differentialgleichung für y zu erhalten. Folgern Sie, dass die allgemeine Lösung die Form $x(t) = ce^{\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau} + \int_{t_0}^t b(\tau)e^{\int_\tau^t a(r)\,\mathrm{d}r}\,\mathrm{d}\tau$ für eine (beliebige) Konstante $c \in \mathbb{R}$ besitzt.
Hinweis: Hauptsatz der Integralrechnung $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{t_0}^t a(\tau)\,\mathrm{d}\tau = a(t)$.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $x' = 2x + t$.

Aufgabe 4.2) [Bernoulli Differentialgleichungen]
Wir nennen Differentialgleichungen vom Typ $x' = a(t)x + b(t)x^\alpha$ für $t \geq t_0 \in \mathbb{R}$ mit stetigen Funktionen $a, b\colon [t_0, \infty) \to \mathbb{R}$ und konstantem $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ Bernoulli Differentialgleichungen.

a) Nutzen Sie die Transformation $y = x^{1-\alpha}$ um eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung für y zu erhalten.

b) Finden Sie die allgemeine Lösung von $x' = x^3 + \frac{x}{t+1}$ für $t \geq 0$.

Aufgabe 4.3) [Riccati Differentialgleichungen]
Eine Differentialgleichung vom Typ $x' = a(t)x + b(t)x^2 + c(t)$ mit stetigen Funktionen $a, b, c\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ wird Riccati Differentialgleichung genannt.

a) Es sei x_p eine Lösung der Riccati Differentialgleichung (die man zum Beispiel erraten hat). Nutzen Sie die Transformationen $y = x - x_p$ um eine Bernoulli Differentialgleichung zu erhalten und $z = \frac{1}{y} = \frac{1}{x-x_p}$ um eine lineare Differentialgleichung zu erhalten.

b) Überzeugen Sie sich davon, dass $x_p = \frac{4}{t}$ eine Lösung der Differentialgleichung $t^2x' + (tx-2)^2 = 0$ für $t \geq 1$ ist. Bestimmen Sie anschließend die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

c) Lösen Sie die Differentialgleichung $x' = 2 - 2tx + x^2$ für $t \geq 0$. Verwenden Sie dazu zunächst den Ansatz $x_p = kt^q$ für zu bestimmende Konstanten $k \in \mathbb{R}$, $q > 0$.
Hinweis: $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{\tau^2}\,\mathrm{d}\tau := \mathrm{Erfi}(t)$ bezeichnet die Gaussche imaginäre Fehlerfunktion.