Motivation: Ein einfacher Typ von Differentialgleichungen für Funktionen $y\colon [0,T) \to \mathbb{R}$ für ein $T > 0$ sind "separable" Differentialgleichungen, die von dem Typ

$$y'(t) = f(t)g(y(t)) \tag{1}$$

sind, wobei $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind. Man beachte, dass die explizite Abhängigkeit von y auch oft nicht dazugeschrieben wird, also $y' = f(t)g(y)$, dies ist aber nur eine Frage der Notation. Diese Differentialgleichungen lassen sich "leicht" durch Trennung der Variablen lösen, welches wir im Folgenden exemplarisch an der Gleichung $y'(t) = y(t)$ betrachten, aber auf analoge Weise auf andere separable Differentialgleichung anwendbar ist. Zunächst formt man die Gleichung zu $\frac{y'(t)}{g(y(t))} = f(t)$ um, also erhält man im Beispiel $\frac{y'(t)}{y(t)} = 1$. Dies ist natürlich nur möglich, wenn man annimmt, dass $g(y(t)) \neq 0$ oder in unserem konkreten Fall $y(t) \neq 0$. Man integriert beide Seiten und substituiert $\mathbf{y} = y(t)$ mit $\mathrm{d}\mathbf{y} = y'(t)\,\mathrm{d}t$, für das Beispiel erhält man

$$\int 1\,\mathrm{d}t = \int \frac{y'(t)}{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\mathbf{y}}\,\mathrm{d}\mathbf{y}.$$

Nun muss man diese Integral berechnen, und anschließend $y(t) = \mathbf{y}$ rücksubstituieren, für unser Bespiel also $t + c_1 = \ln(|\mathbf{y}|) + c_2 = \ln(|y(t)|) + c_2$. Wenn die resultierende Gleichung nach $y(t)$ aufgelöst werden kann, erhält man die explizite Lösung. In unserem Beispiel lässt sich die Gleichung leicht auf y umformen und so erhält man $y(t) = \mathrm{sign}(y(t))e^{t+(c_1-c_2)} = \pm e^{t+(c_1-c_2)}$ (da sich das $\mathrm{sign}(y(t))$ nicht schlagartig ändert sonder konstant sein sollte). Dies gibt uns eine Menge von Lösungen ("allgemeine Lösung") die von den Integrationskonstanten c_1 und c_2 abhängen (in Wirklichkeit immer nur von $\tilde{c} = c_1 - c_2$). Oft sind aber zusätzliche Anfangsbedingungen $y(0) = y_0$ gegeben, und man muss die passende Konstante $\tilde{c}$ finden um $y(t)$ endgültig zu bestimmen. Im Beispiel gilt $y(0) = \mathrm{sign}(y(0))e^{0+c_1-c_2} = y_0$ für den Anfangswert y_0 und es folgt $\mathrm{sign}(y_0)e^{c_1-c_2} = y_0$ und folglich $y(t) = y_0 e^t$.

Aufgabe 3.1) [Trennung der Variablen]
Bestimmen Sie mittels Trennung der Variablen die Lösungen $y\colon [0,T) \to \mathbb{R}$ (insbesondere auch T) der folgenden Differentialgleichungen für $t \geq 0$ in Abhängigkeit von $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}$.

- **a)** $y' = \lambda \sin(t) y$ für eine Konstante $\lambda \in \mathbb{R}$ und $y_0 \neq 0$,
- **b)** $y' = y^3\sqrt{t}$ mit $y_0 \neq 0$,
- **c)** $y' = e^{y+3t}$,
- **d)** $y' = y(1-y)$. Der Einfachheit halber nehmen wir zusätzlich $y(t) \in (0,1)$ für alle $t \geq 0$ an. (**Hinweis:** Partialbruchzerlegung zur Lösung des Integrals).

Hinweis. *Achten Sie darauf, dass Trennung der Variablen nur zulässig ist wenn $g(y(t)) \neq 0$ (da man sonst durch Null dividiert) und selbst wenn dies gilt, existiert die Lösung unter Umständen nicht unendlich lange, sondern nur bis zu einem Zeitpunkt $T > 0$. Diesen Zeitpunkt weiß man aber nicht im Vorhinein, daher löst man zunächst $y(t)$, und überprüft dann, ob $y(t)$ an irgendeiner Stelle undefiniert wird (also beispielsweise Division durch Null oder Logarithmus nicht-positiver Zahl). Die erste solche Stelle entspricht T, mit $T = \infty$ falls keine solche Stelle existiert. Wäre beispielsweise die errechnete Lösung $y = \frac{y_0}{1-3t}$ so ist $T = \frac{1}{3}$, während $T = \infty$ für $y = y_0 e^t$ ist.*

Aufgabe 3.2) [Bakterienwachstum]
Es bezeichne $N(t)$ die Konzentration eines Bakteriums in einer Petrischale zum Zeitpunkt $t \geq 0$ für $N\colon [0,T) \to \mathbb{R}$. Das Wachstum einer solchen Konzentration wird häufig via einer "logistischen Differentialgleichung"

$$N'(t) = \kappa \left(1 - \frac{N(t)}{N_{\max}}\right) N(t) - H := G(N(t)) \qquad \text{mit } N(0) = N_0 \tag{2}$$

modelliert, wobei $N_0 \in (0, N_{\max})$ die Konzentration zum Anfangszeitpunkt, $\kappa > 0$ die (konstante) Wachstumsrate, $N_{\max} > 0$ die (konstante) Kapazität, und $H \geq 0$ die (konstante) Ernterate bezeichnen. (N nimmt die Rolle ein die bisher der Variablennamen y hatte.) Dieses Modell führt zu exponentiellem Wachstum mit Rate κ für kleines N, mit zunehmender Konzentration verlangsamt sich das Wachstum aber, da man an die Kapazitätsgrenze (bspw. zur Verfügung stehende Nährstoffe) stößt, und die Konzentration überschreitet nicht diese Kapazität. Die Ernterate H symbolisiert das stetige Entfernen von Bakterien (etwa Entnahme zur Untersuchung).

a) Betrachten Sie die Transformation $\hat{t} = t_{\text{ref}} t$ und $\widehat{N} = N_{\text{ref}} N$ für Konstanten $t_{\text{ref}}, N_{\text{ref}} \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie anhand von (2) die Differentialgleichung die $\widehat{N}(\hat{t})$ erfüllt, also

$$\frac{d\widehat{N}}{d\hat{t}}(\hat{t}) = F(\widehat{N}(\hat{t})) \tag{3}$$

für eine zu bestimmende Funktion (rechte Seite) F. (**Hinweis:** Kettenregel)

b) Es sei $H = 0$. Bestimmen Sie anhand von a) die Konstanten t_{ref} und N_{ref} sodass die Differentialgleichung (3) mit der Differentialgleichung aus Aufgabe 2.1 d) übereinstimmt, und folgern Sie die Lösung von (2) mit $H = 0$.

c) Bestimmen Sie, für welche Werte von N gilt $G(N) < 0$, $G(N) > 0$ beziehungsweise $G(N) = 0$ gilt. Folgern Sie den Grenzwert $\lim_{t\to\infty} N(t)$ in Abhängigkeit von den Parametern $N_0, H, \kappa, N_{\max}$.
Hinweis: Sie können verwenden dass, wenn $N' = G(N)$ mit stetig differenzierbarem G und $G(N_0) > 0$ so ist $G(N(t)) \geq 0$ für alle t und folglich $N(t)$ monoton wachsend. Der Grenzwert solcher Funktion kann nur $\tilde{N}$ mit $G(\tilde{N}) = 0$ oder $\tilde{N} = \infty$ sein. Analog für $G(N_0) < 0$ und fallend, und im Fall $G(N_0) = 0$ bleibt $N(t) = N_0$ konstant.

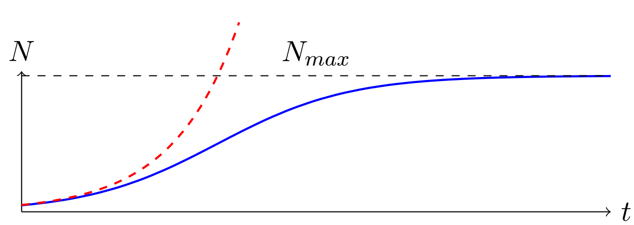

Abbildung 1: Entwicklung der Bakterienkonzentration ohne Ernte, in blau für logistisches Wachstum und in rot zum Vergleich für exponentielles Wachstum. Man sieht anfangs sehr ähnliches Verhalten, aber logistisches Wachstum flacht ab und konvergiert gegen die Kapazität.