Motivation: Nachdem wir nun den Begriff der ODE definiert haben, müssen wir einige zusätzliche Konzepte entwickeln, um die Struktur der ODEs tiefer zu beschreiben. Der Begriff der "Struktur" ist wichtig, da wir sehen werden, dass er eine Schlüsselrolle dabei spielt, wie wir die Natur des Verhaltens von Lösungen von ODEs verstehen.

Definition 1) Eine *gewöhnliche Differentialgleichung (ODE)* ist eine Gleichung für eine Funktion einer Variablen, die ("gewöhnliche") Ableitungen der Funktion (und möglicherweise bekannte Funktionen der gleichen Variablen) beinhaltet. Sei $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig. Dann heißt

$$y^{(m)} = f\big(x, y, y', ..., y^{(m-1)}\big) \tag{1}$$

eine ODE der Ordnung m. Ihre Lösung ist eine m-mal differenzierbare Funktion $\phi : I \to \mathbb{R}$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist, sodass $\{(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(m-1)}(x)) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in I\} \subseteq \Omega$ und $\forall x \in I : \phi^{(m)}(x) = f\big(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{(m-1)}(x)\big)$. Die Variablen $\{y(x), y'(x), ..., y^{(m-1)}(x)\}$ werden *abhängige Variable* genannt, und x wird *unabhängige Variable* genannt. Die Variablen $\{y(x), y'(x), \dots, y^{(m-1)}(x)\}$ werden oft auch nur $\{y, y', \dots, y^{(m-1)}\}$ geschrieben.

Definition 2) Eine ODE wird als *linear* bezeichnet, wenn für $x \in I \subset \mathbb{R}$ die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei $\Omega = I \times \mathbb{R}^m$ ist, affine-linear in Abhängigkeit der abhängigen Variablen ist. Wenn sie nicht linear ist, wird die ODE als *nichtlinear* bezeichnet.

Bezeichnungen:

- Die unabhängige Variable wird häufig auch mit t bezeichnet (insbesondere, wenn sie die Zeit beschreibt). Für die abhängige Variable schreibt man dann oft auch x statt y. Es sind also verschiedenste Schreibweisen für ODEs in Verwendung, z.B. (für ODEs erster Ordnung) $y' = f(t, y)$, $x' = f(t, x)$, $\dot{x} = f(t, x)$, $y'(t) = f(t, y(t))$, $x'(t) = f(t, x(t))$. Durch Konvention weist die Notation '$\dot{}$' auf eine Ableitung in Bezug auf die Zeit hin, z.B. $\dot{x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.
- Des weiteren ist eine *partielle Differentialgleichung* (PDE) eine Gleichung, die zwei oder mehr unabhängige Variablen, eine unbekannte Funktion (abhängig von diesen Variablen) und partielle Ableitungen der unbekannten Funktion in Bezug auf die unabhängigen Variablen beinhaltet.

Aufgabe 2.1) [Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung]
Klassifizieren Sie die folgenden Gleichungen als gewöhnliche (ODE) oder partielle Differentialgleichungen (PDE). Im Fall von einer ODE, bestimmen Sie ihre Ordnung und bestimmen Sie, ob sie linear oder nichtlinear sind. Identifizieren Sie außerdem die abhängigen und unabhängigen Variablen.

a) $y''' + y''y' = 3x^2$,

b) Van Der Pols Gleichung $m\ddot{x} + kx = a\dot{x} - b\dot{x}^3$ für Konstanten $m, k, a, b \in \mathbb{R}$,

c) Bessels Gleichung $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$ für eine Konstante $\nu \in \mathbb{R}$,

d) Logistisches Populations Modell $\dot{x} = ax\Big(1 - \dfrac{x}{K}\Big)$ für Konstanten $a, K \in \mathbb{R}$,

e) Burgers Gleichung $\dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ für eine Konstante $\nu \in \mathbb{R}$,

f) Zweites Newtonsches Gesetz $m\ddot{y} = F(y)$ für eine Konstante $m \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.2) [ODE-Klassifizierung]

a) Finden Sie die allgemeinste Form einer linearen Gleichung zweiter Ordnung.

b) Welche der folgenden Differentialgleichungen sind für y linear?

- $y' = sin(x) + cos(y)$,
- $y' = sin(y)x + cos(x)$,
- $y' = sin(x)y + cos(x)$.

Aufgabe 2.3) [Navier-Stokes Gleichung - Poiseuille Strom]
Die Navier-Stokes Gleichungen sind ein System überaus komplexer partieller Differentialgleichungen welche den Fluss eines Fluids beschreiben, welche aber im Allgemeinen keine explizite Lösungen besitzen. In bestimmten Fällen reduzieren sich die Gleichungen jedoch auf etwas viel Einfacheres. Angenommen, ein Fluid strömt durch ein Rohr mit kreisförmigem Querschnitt mit dem Radius a. Angenommen, die Geschwindigkeit V des Fluids hängt nur von r – dem Abstand vom Mittelpunkt des Rohrs – ab, so lautet die durch V erfüllte Gleichung:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = -P, \tag{2}$$

wobei P eine positive Konstante ist.

a) Multiplizieren Sie (2) mit r und integrieren Sie einmal, um zu zeigen, dass

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} = -\frac{Pr}{2} + \frac{c}{r},$$

wobei c eine willkürliche Konstante ist.

b) Integrieren Sie erneut, um einen Ausdruck für die Geschwindigkeit zu finden, und verwenden Sie dann die Tatsachen, dass (i) die Geschwindigkeit an allen Punkten im Rohr endlich sein sollte und (ii) dass die Flüssigkeit an dem Rand des Rohres “klebt” (was bedeutet, dass $V(a) = 0$ ist), um zu zeigen, dass

$$V(r) = \frac{P}{4}(a^2 - r^2).$$

Dies ist als Poiseuille-Fluss bekannt. Siehe Abbildung 1.

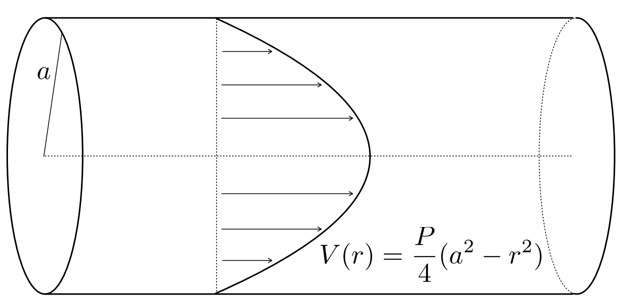

Abbildung 1: Das quadratische Geschwindigkeitsprofil in einem kreisförmigen Rohr.