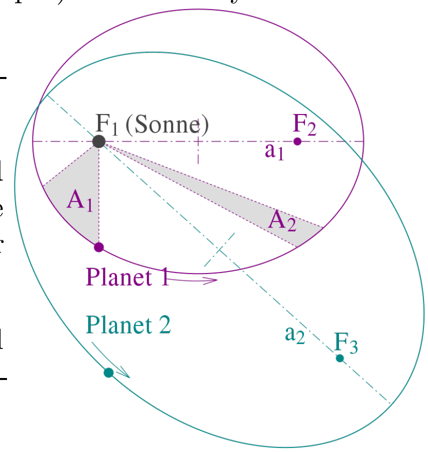
**Motivation:** Aus dem Physikunterricht in der Schule kennt man die Keplerschen Gesetze, die die Bewegung von Planeten (oder allgemeiner Körper) im Sonnensystem beschreiben:

1. Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen. In einem ihrer Brennpunkte steht die Sonne.
2. Der Fahrstrahl zwischen einem Planeten und der Sonne überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen, und diese Fläche hängt linear von der Länge des Zeitintervalls ab.
3. Die Quadrate der Umlaufzeiten sind proportional den Kuben der großen Halbachsen der Bahnenellipsen.




Quelle: wikipedia.org/wiki/Keplersche_Gesetze

In der Grafik zeigen die grauen Sektoren die Flächen die in gewissen gleich langen Zeitintervallen überstrichen wurden und diese besitzen die gleiche Fläche. Wir wollen im Folgenden auf mathematisch simple Weise die Keplerschen Gesetze nachvollziehen und in einer stark vereinfachten Situation beweisen.

**Aufgabe 11.1) [Keplersche Gesetze]**

Wir betrachten ein planetares System mit nur einem Körper (wir sprechen im Nachfolgenden von Planeten obwohl dies auch für andere Körper gilt) und einer Sonne. In diesem System wirke ausschließlich die Gravitationskraft der Sonne auf den Planeten, nicht aber die Gravitationskraft des Planeten auf die Sonne, wir nehmen also an, die Sonne sei in einem Punkt (oBdA. im Koordinatenursprung) fixiert. (In Realität gibt es wegen "Actio und Reactio" Wechselwirkung aller Himmelskörper – insbesondere wird auch die Sonne von Planeten angezogen – was das Ganze viel komplizierter machen würde.) Da die Gravitationskraft von den Massen der Körper, sowie quadratisch vom reziproken Abstand zweier Körper abhängt, und in Richtung des jeweils anderen Körpers zeigt, gilt nach dem Newtonschem Gesetz "Kraft = Masse mal Beschleunigung" das System von Differentialgleichungen der Ordnung 2:

$$m\ddot{\vec{x}} = -\gamma m M \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|^3} \qquad \text{mit } \vec{x}(0) = \vec{x}_0,\ \dot{\vec{x}}(0) = \vec{v}_0 \tag{1}$$

wobei $m$ die Masse des Planeten, $M$ die Masse der Sonne und $\gamma$ die Gravitationskonstante bezeichnet, und $\vec{x}(t) \neq 0$ der Position des Planeten im dreidimensionalen Raum entspricht. Man betrachtet außerdem die zugehörigen Größen

$$\vec{J} = m\big(\vec{x} \times \dot{\vec{x}}\big) \qquad \text{(Drehmoment)}, \tag{2}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{\gamma M m}\big(\vec{J} \times \dot{\vec{x}}\big) + \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} \qquad \text{(Achsenvektor)}, \tag{3}$$

wobei "$\times$" dem Kreuzprodukt in $\mathbb{R}^3$ entspricht. Es gibt einige Rechenregeln für Kreuzprodukte "$\times$", die die folgenden Berechnungen deutlich vereinfachen und sich durch (stupides) Nachrechnen beweisen lassen. Für $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ und Funktionen $\vec{y}, \vec{z} \colon [0, T) \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und das Standard-Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und induzierte Euklidische Norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^3$ gilt

$$\langle \vec{a}\times\vec{b},\vec{c}\rangle = -\langle \vec{c}\times\vec{b},\vec{a}\rangle, \tag{4}$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\langle \vec{b},\vec{c}\rangle\vec{a} + \langle \vec{a},\vec{c}\rangle\vec{b} \qquad \text{(Grassman Identität)}, \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}(t)\|}\right] = -\frac{\langle \vec{y},\dot{\vec{y}}\rangle}{\|\vec{y}\|^3}\vec{y} + \frac{\dot{\vec{y}}}{\|\vec{y}\|} \qquad \text{(Kettenregel)}, \tag{6}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{y}\times\vec{z}] = \dot{\vec{y}}\times\vec{z} + \vec{y}\times\dot{\vec{z}} \qquad \text{(Produktregel)}, \tag{7}$$

und insbesondere gilt $\vec{a},\vec{b}\in(\vec{a}\times\vec{b})^\perp$ (der Ebene orthogonal zu $\vec{a}\times\vec{b}$), und $\vec{a}\times\vec{b}=0$ genau dann, wenn $\vec{a}=k\vec{b}$ für ein $k\in\mathbb{R}$. Wir nehmen wenn nicht anders erwähnt $\vec{J}\neq 0$ an.

**a)** Zeigen Sie, dass $\vec{A}$ und $\vec{J}$ aus (2) und (3) konstant sind, indem Sie $\dot{\vec{J}}=0$ und $\dot{\vec{A}}=0$ nachrechnen.

Zeigen Sie weiters: falls $\vec{J}=0$ ist, so bewegt sich $\vec{x}$ nur auf einer 1-dimensionalen Geraden (das heißt es gibt $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$, sodass $\vec{x}(t)=c(t)\vec{v}$ für $c\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist). (**Hinweis:** Betrachten Sie $\vec{A}$ im Fall $\vec{J}=0$). Wie kann man diesen Fall praktisch interpretieren?

**b)** Zeigen Sie, dass $\vec{x}$ und $\vec{A}$ in der Ebene $E=\vec{J}^\perp$ liegen. Zeigen Sie weiters, dass $\vec{y}=R\vec{x}$ für eine Rotationsmatrix $R\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ (insbesondere gilt $\|R\vec{a}\|=\|\vec{a}\|$ für alle $\vec{a}\in\mathbb{R}^3$) ebenfalls (1) mit $\vec{y}(0)=R\vec{x}_0$ und $\dot{\vec{y}}(0)=R\vec{v}_0$ erfüllt.

Wie in a) gezeigt, ist $\vec{J}\neq 0$ der interessantere Fall, da $\vec{J}=0$ ein stark vereinfachtes Problem darstellt. Die Orientierung des Koordinatensystems ist nach b) nicht relevant für die Differentialgleichung (was ja logisch ist, schließlich gibt es im Weltall kein natürliches Oben, Unten etc.), und daher nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\vec{x}$ in der $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2$ Ebene $E$ des kartesischen $(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3)$-Koordinatensystems liegt.

**c)** Es bezeichne $\varphi$ den Winkel zwischen $\vec{A}$, dem Ursprung und $\vec{x}$ in der Ebene $E$ (das heißt $\langle\vec{A},\vec{x}\rangle=\|\vec{A}\|\|\vec{x}\|\cos(\varphi)$) und es sei $\varepsilon:=\|\vec{A}\|$ (konstant), siehe Abbildung 1. Zeigen Sie unter der Annahme $\varepsilon\neq 0$, dass

$$\|\vec{x}\| = \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon\cos(\varphi)} \qquad \text{mit } p:=\frac{\|\vec{J}\|^2}{\gamma M m^2\varepsilon}. \tag{8}$$

Zeigen Sie außerdem, dass im Spezialfall $\varepsilon=0$ gilt, dass $\|\vec{x}\|$ konstant ist (also sich auf einer Kreisbahn bewegt).

Die Darstellung (9) entspricht der Polardarstellung eines Kegelschnittes mit Exzentrizität $\varepsilon$ und einem Brennpunkt im Ursprung (Sonne im Brennpunkt) zur Achse $\vec{A}$, womit wir das erste Keplersche Gesetz (in diesem stark vereinfachten Setting) bewiesen haben, wenn $\varepsilon\in(0,1)$. Der Spezialfall $\varepsilon=0$ entspricht der Bewegung auf einer Kreisbahn, $\varepsilon=1$ auf einer Parabel und $\varepsilon>1$ Hyperbelbahn (das ist nicht der Fall für Planeten, aber beispielsweise für manche Kometen), siehe Abbildung 1.

**d)** Es sei $\vec{x}_0\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$ und die Ebene $E$ gegeben, und $\vec{x}_0^\perp$ sei ein dazu orthogonaler normierter Vektor in $E$. Zeigen Sie für jedes $\tilde{\varepsilon}\geq 0$ die Existenz eines $c>0$, sodass mit $\vec{v}_0=c\vec{x}_0^\perp$, die Exzentrizität $\varepsilon=\|\vec{A}_{|t=0}\|$ dem Wert $\tilde{\varepsilon}$ entspricht. Das heißt, man kann durch passende Anfangsgeschwindigkeit jede Exzentrizität erreichen, und insbesondere für hinreichend große Anfangsgeschwindigkeit fliegt man auf Hyperbelbahnen und entkommt damit der Anziehungskraft der Sonne.

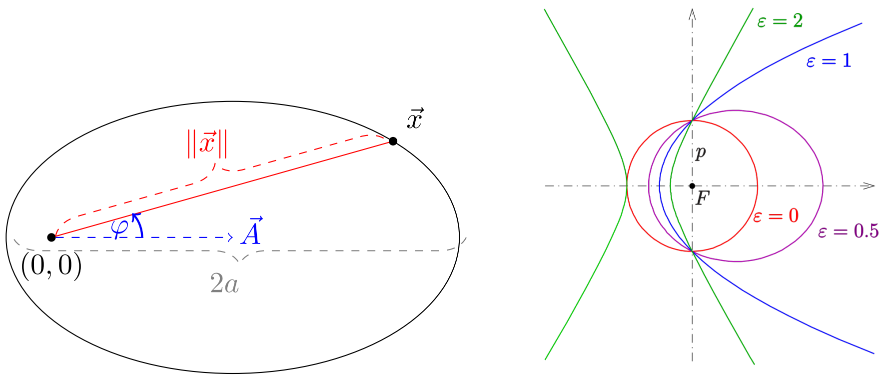



Abbildung 1: Vereinfachte Darstellung der Ellipsenbahn eines Planeten links, rechts Darstellung allgemeiner Kegelschnitte [Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Kegelschnitt].

Für eine planare Kurve $\vec{x} = (x_1, x_2, 0)$ gilt, dass die Fläche, die vom Fahrstrahl zwischen $\vec{x}$ und dem Ursprung im Zeitintervall $[t_0, t_0 + \Delta_t]$ überstrichen wird $\int_{t_0}^{t_0+\Delta_t} \frac{1}{2} g(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t))\,\mathrm{d}t$ mit $g(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 x_1$ entspricht (Sektorformel von Leibniz). Außerdem entspricht der Flächeninhalt einer Ellipse mit Exzentrizität $\varepsilon$ und größere Halbachse $a$ der Formel $F = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}$, außerdem gilt $a = \frac{\varepsilon p}{1-\varepsilon^2}$.

**e)** Zeigen Sie, dass $|g(\vec{x}(t), \dot{\vec{x}}(t))| = \|\vec{J}\|/m$ konstant ist (**Hinweis**: $\vec{x} = (x_1, x_2, 0)$ in $\vec{J}$ einsetzen), und daher die vom Fahrstrahl überstrichene Fläche linear von $\Delta_t$ abhängt und damit das zweite Keplersche Gesetz gilt. Folgern Sie daraus für die Umlaufzeit eines Planeten $T$ im Fall $0 < \varepsilon < 1$ das dritte Keplersche Gesetz $a^3 = cT^2$ für eine Konstante $c \geq 0$, die nur von $\gamma$ und $M$ abhängt (also insbesondere für alle Planeten des Sonnensystems gleich ist). **Hinweis**: Betrachten Sie die Fläche, die in einer Umdrehung überstrichen wird.