Motivation: Der Satz von Picard-Lindelöf (in der Vorlesung Satz II.3) ist ein zentrales Resultat über die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen und besagt: Wenn $f\colon D \to \mathbb{R}^d$ stetig in $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ (offen) ist, und für $(t_0, \vec{x}_0) \in D$ in $Z_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times B_b(\vec{x}_0) \subset D$ lokal Lipschitz stetig bezüglich der $\vec{x}$ Komponente ist (für Zahlen $a, b > 0$), so existiert eine eindeutige Lösung des Anfangwertproblems $\vec{x}' = f(t, \vec{x}(t))$ mit $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ für t aus dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ für $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, wobei $M = \max_{(\tilde{t},\tilde{x}) \in Z_{a,b}} |f(\tilde{t}, \tilde{x})|$ ist.

Aufgabe 10.1) [Lebensdauer einer Lösung]
Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$x' = x^2, \qquad x(0) = 1. \tag{1}$$

Nutzen Sie den Satz von Picard-Lindelöf um zu zeigen, dass die Lösung (zumindest) für $t \in [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ existiert (ohne die Lösung tatsächlich zu berechnen).

Aufgabe 10.2) [Schnittpunkte von Trajektorien]
Es sei $I = (t_0, T)$ ein offenes Intervall mit $t_0, T \in \mathbb{R}$, $t_0 < T$ und $\vec{x}\colon I \to \mathbb{R}^d$ und $\vec{y}: I \to \mathbb{R}^d$ stetig differenzierbare Funktionen sodass

$$\dot{\vec{x}} = f(t, \vec{x}) \text{ für } t \in I, \qquad \dot{\vec{y}} = f(t, \vec{y}) \text{ für } t \in I \tag{2}$$

für eine stetige Funktion $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$ die auf offenem $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ lokal Lipschitz stetig bezüglich der vektoriellen Größe ist und $\{(t, \vec{x}(t)) \mid t \in I\} \cup \{(t, \vec{y}(t)) \mid t \in I\} \subset \Omega$. Es existiere ein $t^* \in I$ sodass $\vec{x}(t^*) = \vec{y}(t^*)$.

- **a)** Zeigen Sie, dass es ein Intervall $I_{t^*} = [t^* - \alpha, t^* + \alpha]$ für ein $\alpha > 0$ gibt, sodass $\vec{x}(t) = \vec{y}(t)$ für $t \in I_{t^*}$.
- **b)** Folgern Sie, dass $\vec{x} = \vec{y}$ auf I gilt. **Hinweis:** Folgern Sie, dass die Menge $M_1 = \{t \in I \mid \vec{x}(t) = \vec{y}(t)\}$ und die Menge $M_2 = \{t \in I \mid \vec{x}(t) \neq \vec{y}(t)\}$ offen sind (d.h. für $i = 1, 2$ für jedes $\tilde{t} \in M_i$ gibt es ein $\gamma > 0$ sodass $[\tilde{t} - \gamma, \tilde{t} + \gamma] \cap I \subset M_i$). Ein Intervall kann nicht die Vereinigung zwei disjunkter offener nicht-leerer Mengen sein (da zusammenhängend).

Bemerkung. *Dieses Resultat besagt, dass zwei unterschiedliche Lösungen einer Lipschitz stetigen Differentialgleichung sich niemals treffen können, also zu keinem Zeitpunkt gleich sind. Ist die Differentialgleichung zusätzlich autonom, so sind alle Lösungen die irgendwann einen gewissen Wert annehmen nur zeitlich verschobene Versionen voneinander (also $g(t) = h(t + \tau)$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$), insbesondere können sich daher im Phasenportrait keine Trajektorien schneiden.*

Aufgabe 10.3) [Wiederholung: Lösungsmethoden für Anfangswertprobleme]
Im Folgenden betrachten wir einige Anfangswertprobleme, die Sie mit einer der Strategien die in vergangen Übungseinheiten besprochen wurden, lösen können.

- **a)** Lösen Sie das AWP

$$\begin{cases} 6y' - 2y = xy^4 \\ y(0) = -2. \end{cases} \tag{3}$$

b) Lösen Sie das AWP

$$\begin{cases} y' + \log(x)y = \log(x), \\ y(e) = 2. \end{cases} \tag{4}$$

c) Lösen Sie das AWP

$$\begin{cases} x^2 y' = y^2 - 2x^2, \\ y(1) = 1. \end{cases} \tag{5}$$