Motivation: In vielen mathematischen Anwendungen spielen Differentialgleichungen eine wichtige Rolle und entstehen auf natürliche Weise in der Modellierung von Prozessen, in Physik, Finanzen, Soziologie, etc. Klassisches Beispiel ist die Dynamik, bei der Bewegung von Körpern betrachtet wird. Nach dem 3. Newtonschen Gesetz gilt für die Bewegung eines Massepunktes (etwa die Flugbahn eines Balles) nämlich: Kraft ist Masse mal Beschleunigung. Im 1-dimensionalen Fall gilt dann für die Position des Körpers $y(t)$ in Abhängigkeit der Zeit $t \geq 0$ (mit $y\colon [0,T) \to \mathbb{R}$ für $T > 0$),

$$my'' = F \qquad \text{(oder punktweise verstanden als } my''(t) = F(t)), \tag{1}$$

wobei F die auftretenden Kräfte beschreibt, m die Masse dieses Körpers ist, und y'' die Beschleunigung (2. Ableitung der Position) bezeichnet. Da jedoch oft die Kraft F von der Position und Geschwindigkeit des Körpers abhängt, erhält man auf natürliche Weise eine Differentialgleichung, die die Bewegung beschreibt (Bewegungsgleichung).

Aufgabe 1.1) [Widerstandsloser Fall ein Steines]
Wir betrachten den Fall eines Steines ohne Luftwiderstand, dass heißt die einzige auftretende Kraft ist die Schwerkraft, welcher unter Nutzung von (1) zur Differentialgleichung

$$y'' = -g, \qquad y(0) = H \quad \text{und} \quad y'(0) = v_0 \tag{2}$$

führt, wobei $g > 0$ die (konstante) Erdbeschleunigung, $H > 0$ die Höhe aus der der Stein fällt, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit beschreibt und $y(t)$ die Höhe des Steins zum Zeitpunkt $t \geq 0$ beschreibt.

a) Lösen Sie (2) (also bestimmen Sie $y(t)$) via Integration. Die Bedingungen an $y(0)$ und $y'(0)$ können genutzt werden um Integrationskonstanten zu bestimmen.

b) Zeigen Sie, dass ein eindeutiges $t^* > 0$ existiert, für das $y(t^*) = 0$ gilt (das heißt der Stein tatsächlich irgendwann auf den Boden fällt) und dass dieses t^* monoton wachsend von v_0 abhängt (wenn man schneller nach oben wirft dauert es länger bis der Stein wieder herunter kommt).

Hinweis: Sie können benutzen, dass für Zahlen $a, b > 0$ gilt $a < \sqrt{a^2 + b}$.

c) Überzeugen Sie sich in dem Spezialfall $v_0 = 0$ von den aus der Schule wohl bekannten Formeln

$$t^* = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \qquad y'(t^*) = \sqrt{2gH}, \qquad s(t) := \int_0^t |y'(\tau)| \,\mathrm{d}\tau = g\frac{t^2}{2}, \tag{3}$$

wobei $y'(t^*)$ die Aufprallgeschwindigkeit und $s(t)$ der zurückgelegte Weg des Steines bis zur Zeit t beschreibt.

Aufgabe 1.2) [Masse-Feder-System]
Wir betrachten eine Masse die an einer Feder fixiert ist, auf welche aber auch eine Dämpfung wirkt, siehe Abbildung 1. Erneut kann man das Newtonsche Gesetz anwenden und erhält die Differentialgleichung

$$y'' + cy' + dy = 0, \tag{4}$$

wobei $c \geq 0$ die Dämpfungskonstante und $d \geq 0$ die Federkonstante bezeichnet und $y(t)$ die Auslenkung der Masse zum Zeitpunkt t bezeichnet. Hierbei beschreibt der Term dy die Zugkraft der Feder (desto weiter vom Zentrum entfernt, desto stärker zieht die Feder) und cy' beschreibt die Dämpfung (desto schneller sich die Masse bewegt, desto stärker bremst die Dämpfung).

a) Es sei $y \in \mathcal{C}^2([0,\infty))$ eine (zweimal stetig differenzierbare) Lösung von (4) und $H = (y')^2 + dy^2$ bezeichne die Energie des Systems (kinetische Energie plus potentielle Energie der Feder). Zeigen Sie, dass H konstant ist falls $c = 0$ und H streng monoton fallend ist falls $c > 0$ und $y' \neq 0$ (das heißt die Energie bleibt gleich wenn es keine Dämpfung gibt, im Fall der Dämpfung verliert das System aber Energie solange es nicht still steht).

b) Unter der Annahme $4d - c^2 > 0$ definiere für $\omega = \frac{\sqrt{4d-c^2}}{2}$ die Funktionen

$$y_1 = e^{\frac{-ct}{2}} \cos(\omega t) \qquad \text{und} \qquad y_2 = e^{\frac{-ct}{2}} \sin(\omega t). \tag{5}$$

Zeigen Sie, dass y_1 eine Lösung von (4) ist. (Man kann sich durch analoge Rechnung davon überzeugen, dass y_2 ebenfalls eine Lösung ist.)

c) Wir betrachten den vereinfachten Fall $c = 0$ (keine Dämpfung), dann sind $y_1 = \cos(\sqrt{d}\ t)$ und $y_2 = \sin(\sqrt{d}\ t)$ Lösungen. Für Konstanten $A, B \in \mathbb{R}$ ist $y = Ay_1 + By_2$ ebenfalls eine Lösung. Bestimmen Sie A und B, sodass $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ gilt, also wir eine Lösung zu einer spezifischen Ausgangssituation finden.

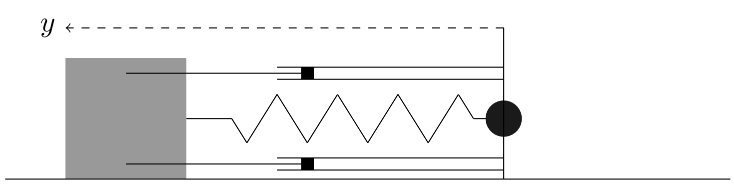

Abbildung 1: Darstellung des Masse-Feder-Systems mit Masse (grau), und Aufhängung der Feder im Punkt $y = 0$. Die Feder ist durch die Zickzack Linie dargestellt, darüber und darunter sind stilistisch Dämpfer zu sehen.