Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

7. Aufgabenblatt

Definition (Vorwärts- und Rücksubstitution)**.** *Mittels der in der Vorlesung besprochenen LR-Zerlegung lässt sich (unter gewissen Annahmen) eine reguläre Matrix* $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *als* $A = LR$ *schreiben, wobei* $L = (l_{ij})_{ij}$ *eine untere Dreiecksmatrix und* $R = (r_{ij})_{ij}$ *eine obere Dreiecksmatrix ist. Dies vereinfacht das Lösen eines linearen Gleichungssystems* $Ax = b$ *signifikant, indem man* $c := Rx$ *definiert, und zunächst* $Lc = b$ *und anschließend* $Rx = c$ *löst. Da* L *und* R *Dreiecksmatrizen sind, ist das Lösen dieser zwei Gleichungssystem mittels Vorwärts- bzw. Rücksubstitution möglich, welche wie folgt berechnet werden:*

$$c_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} c_j \qquad i = 1, 2, \ldots, N, \qquad \text{(Vorwärtssubstitution)}$$

$$x_i = \left[c_i - \sum_{k=i+1}^{N} r_{ik} x_k \right] / r_{ii} \qquad i = N, N-1, \ldots, 1. \qquad \text{(Rücksubstitution)}$$

Aufgabe 1 (Gauß-Algorithmus mit Fill-in Effekt)**.** *Gegeben seien die Matrizen*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- ***a)*** *Berechnen Sie die LR Zerlegung von* A *mittels dem Gauß-Verfahren mit Diagonalstrategie als Pivot-Strategie, d.h. als Pivot-Elemente werden der Reihe nach Diagonaleinträge verwendet.*
- ***b)*** *Nutzen Sie die LR Zerlegung und Vorwärts- bzw. Rücksubstitution um das Gleichungssystem* $Ax = b$ *mit* $b = [5, 1, 12, 13, 13]$ *zu lösen.*
- ***c)*** *Bestimmen Sie die LR Zerlegung von* B *und lösen Sie* $Bx = b$ *mit* $b = [13, 13, 12, 1, 5]$*. Erklären Sie den Zusammenhang der Lösung zur Lösung von Punkt b).*

Bemerkung. *Dieses Beispiel illustriert den sogenannten "Fill-in" Effekt, welcher dazu führt dass Matrizen die ursprünglich viele Null-Einträge enthielten ("dünn-besetzt" bzw. "sparse" sind), durch die Lösungsmethoden transformiert werden sodass sie viel weniger Null-Einträge besitzen. Da Null-Einträge "günstig" für die Berechnung sind, ist dies ein problematisches Phänomen weshalb bei dünn-besetzten Matrizen oft andere Verfahren – iterative Löser – zum Einsatz kommen.*

Matlab-Aufgabe 2 (Gauß-Elimination)**.** *Im Folgenden schreiben wir Matlab-Funktionen welche für eine gegebene Matrix* $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *und Vektor* $y \in \mathbb{R}^N$ *das Gleichungssystem* $Ax = y$ *mittels Gauß-Verfahrens lösen sollen.*

- ***a)*** *Schreiben Sie Matlab-Funktionen [x]=backsubstitution(R, c) und [c]=forwardsubstitution(L, b) welche die Rücksubstitution bzw. Vorwärtssubstitution zu den Dreiecksmatrizen* R *bzw.* L *und Vektoren* b *durchführen und die Lösung in* x *bzw* c *zurückgeben.*

b) *Schreiben Sie eine Matlab-Funktion [L, R,flag]=my_LR(A) welches die LR Zerlegung der Matrix A via Gauß-Verfahren mit Diagonalstrategie berechnet. Um sicher zu gehen, dass A tatsächlich regulär ist wollen wir verhindern dass es ein Pivot-Element mit Wert* 0 *gibt. Sollte während der Zerlegung ein Pivot-Element mit Betrag kleiner* 10^{-5} *entstehen, soll die Zerlegung abgebrochen werden (bspw. mit "break") und flag=* -1 *gesetzt werden, andernfalls* $flag = 1$.

c) *Kombinieren Sie die Funktionen der vorigen Teilaufgaben in der Funktion* $[x, flag]$=*my_gauss*(A, y) *indem Sie die LR Zerlegung der Matrix* A *berechnen und mit Vorwärts- und Rücksubstitution die Lösung von* $Ax = b$ *berechnen. Die Lösung* x *(falls eine Lösung berechnet werden konnte) sowie flag werden zurückgegeben.*

Testen Sie alle Punkte anhand kleiner Beispiele um sich von deren Richtigkeit zu überzeugen (bspw. Aufgabe 1).

Aufgabe 3 (Regularität diagonaldominater Matrizen)**.** *Eine Matrix* $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *wird als* ***streng diagonaldominant*** *bezeichnet, falls für jede Zeile* $i \in \{1, 2, \dots, N\}$

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} |a_{i,j}| < |a_{i,i}| \tag{1}$$

gilt, dass heißt der Diagonaleintrag ist betragsmäßig größer als die Summe aller verbleibenden Einträge der Zeile. Die Matrix wird ***schwach diagonal dominant*** *genannt, falls für* $i \in \{1, \dots, N\}$

$$\sum_{j=1,\ j\neq i}^{N} |a_{i,j}| \leq |a_{i,i}|. \tag{2}$$

Außerdem nennen wir eine Matrix ***irreduzibel****, falls es für jedes* $i, j \in \{1, \dots, N\}$ *mit* $i \neq j$ *Indizes* $i_1, \dots, i_r$ *gibt, sodass* $a_{i_k,i_{k+1}} \neq 0$ *für* $k = 1, \dots, r-1$ *und* $i_1 = i$, $i_r = j$.

a) *Zeigen Sie dass eine diagonaldominante Matrix* A *stets regulär ist.*

b) *Zeigen Sie, dass eine schwach diagonaldominante Matrix die irreduzibel ist und für ein i (der Einfachheit halber* $\tilde{i}$ *genannt)* (1) *gilt, regulär ist.*

c) *Nutzen Sie das Kriterium in b), um die Regularität der Matrix* Δ_h *in Aufgabe 6.2 zu verifizieren.*

Hinweis. *Für a) nehmen Sie an, dass ein* $x \neq 0$ *existiert, sodass* $Ax = 0$ *(d.h. dass A singulär). Betrachten Sie* $\hat{i}$ *sodass* $|x_{\hat{i}}| = \max_i |x_i| \neq 0$. *Schreiben Sie die* $\hat{i}$*-te Gleichung so um, dass* $a_{\hat{i},\hat{i}} x_{\hat{i}}$ *auf der rechten Seite steht, nehmen Sie auf beiden Seiten den Betrag und nutzen Sie die Dreiecksungleichung,* $|x_i| \leq |x_{\hat{i}}|$ *und* (1) *um dies auf einen Widerspruch zu führen. Für b) gehen Sie analog vor, wobei Sie keinen Widerspruch erhalten sondern* $|x_i| = |x_{\hat{i}}|$ *für alle i mit* $a_{\hat{i},i} \neq 0$ *(die Nachbarn) folgt (weil man "*$\leq$*" statt "*$<$*" hat). Nun lässt sich obiges Argument für die Nachbarn wiederholen, und dank Irreduzibilität gelangt man so zu dem Schluss dass* $|x_{\tilde{i}}| = \max_i |x_i|$ *was aber analog zu a) zu einen Widerspruch führt.*

Bemerkung. *Das Lösen eines Gleichungssystems macht nur Sinn wenn das System auch tatsächlich eine Lösung besitzt. Zwar kann man mittels dem Gauß-Algorithmus feststellen ob eine Matrix singulär ist (wenn es kein zulässiges Pivot-Element gibt), bei Berechnungen mit dem Computer ist es aber nicht möglich zu unterscheiden ob eine Zahl "sehr klein" oder* 0 *ist. Daher sollte man sich nach Möglichkeit bereits vor dem numerischen Lösen des Gleichungssystems über die Regularität der Matrix im Klaren sein. Obiges Kriterium ist oft nützlich bei Matrizen die eine sehr starke "Struktur" aufweisen, um sich von der Regularität zu überzeugen.*