Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

6. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (Fluss im Gleichgewicht)**.** *Gegeben sei das Fluss-System in Abbildung 1. Dabei bezeichnet $f_0 \geq 0$ den Fluss in das System, $f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0$ die Ausflüsse, und $a_i > 0$ für $i = 1, \ldots, 6$ die Gewichte der Verbindungen. Der Fluss durch eine Verbindung ergibt sich damit aus $I_i = a_i x_i$ mit x_i der Flussgeschwindigkeit. Es wird angenommen, dass das System im Gleichgewicht ist, also für jeden Knoten $v \in \{b, \ldots, h\}$ gilt, dass der Einfluss in v gleich dem Ausfluss aus v ist, beispielsweise $f_0 - a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$ damit b im Gleichgewicht ist.*

a) *Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem $Ax = f$ auf, sodass $x = (x_1, \ldots x_6)^T$ zu einem Gleichgewicht führt genau dann wenn $Ax = f$.*

b) *Zeigen Sie, dass $f_0 = f_1 + f_2 + f_3 + f_4$ (Kompatiblitätsbedingung) notwendig für die Existenz einer Lösung von $Ax = f$ ist.*

c) *Zeigen Sie (unter der Annahme der Kompatiblitätsbedingung), dass das System stets eine eindeutige Lösung besitzt.*

Hinweis. *Für b) versuchen Sie das Gleichungssystem so umzuformen, dass $f_0 - f_1 - f_2 - f_3 - f_4$ auf der rechten Seite steht und keine Lösung existieren kann falls diese rechte Seite nicht Null ist. Für c) startend von den Enden können Sie sukzessiv die Werte nach Innen gehend berechnen, wobei Sie so vorgehen können dass jede Gleichung stets nur eine freie Variable hat.*

Bemerkung. *Solche Fluss-Systeme können genutzt werden um den Fluss von Wasser durch ein Kanalsystem, oder den Fluss von Elektrizität durch ein Netz zu beschreiben. Die Gewichte können dabei als Effizienz der Verbindung verstanden werden, etwa als Querfläche des Kanalabschnitts oder das Inverse des elektrischen Widerstands. Die Gleichgewichtsbedingung bedeutet anschaulich, dass in jedem Knoten gleich viel Wasser ein und ausfließt, sodass nirgendwo Wasser verloren geht, erzeugt oder gestaut wird. Im Anbetracht dieser Erkenntnis ist die Kompatibilitätsbedingung nicht überraschend, da wenn mehr Wasser ins System kommt als wieder heraus, der Unterschied irgendwo hin muss.*

Matlab-Aufgabe 2 (Finite Differenzen: Wärmeverteilung)**.** *Die Wärmeverteilung in einem Metalstab im Gleichgewicht sei durch $T(x)$ gegeben, wobei x die Position in dem Stab angibt und $T\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Weiters modelliere $F\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ die Wärmequellen die auf den Stab einwirken. Die Temperatur ist im Gleichgewicht, genau dann wenn*

$$T''(x) = F(x) \qquad \text{für } x \in (0,1) \tag{1}$$

wobei wir annehmen, dass $T(0) = T_0$ und $T(1) = T_1$ fest gegeben sind (die Randtemperatur wird durch Kühlung konstant gehalten). Ein klassisches Problem ist es nun, die Temperatur – anhand der Randtemperatur T_0, T_1 und der Wärmequellen F – zu bestimmen. Um dieses Problem numerisch (approximativ) zu lösen, kann man wie folgt vorgehen:

Es sei $N+1$ die Anzahl der Messungen und $h = \frac{1}{N}$, $x_i = \frac{i}{N}$ für $i = 0, \ldots, N$ Messpunkte einer äquidistante Diskretisierung vom $[0,1]$, $T(x_i) = t_i$ für $i = 0, \ldots, N$ (Temperatur in den Messpunkten) und $f_i = F(x_i)$ für $i = 1, \ldots, N-1$ (Wärmequellen in Messpunkten). Außerdem gilt für eine Funktion $g \in \mathcal{C}^4([0,1])$ und $i = 1, \ldots, N-1$:

$$g''(x_i) = \frac{-2g(x_i) + g(x_{i-1}) + g(x_{i+1}) + O(h^4)}{h^2}. \tag{2}$$

a) *Nutzen Sie* (2) *für* T'' *in* (1) *(unter Vernachlässigung der Terme höherer Ordnung) um das Gleichungssystem* $\Delta_h t = f$ *zu motivieren wobei* $t = (t_1, \dots, t_{N-1})$ *und*

$$\Delta_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N-1\times N-1} \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 - \frac{T_0}{h^2} \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-2} \\ f_{N-1} - \frac{T_1}{h^2} \end{pmatrix}.$$

b) *Schreiben Sie eine Matlab-Funktion [Systemmatrix]=my_systemmatrix(N), welche die zugehörige Systemmatrix* Δ_h *erzeugt.*

c) *Gegeben seien die Wärmequellen und Randwerte*

$$F(x) = \begin{cases} +1 & x \in (0, 0.5) \\ 0 & x = 0.5 \\ -1 & x \in (0.5, 1) \end{cases}, \qquad T_0 = 0, \quad T_1 = 0. \tag{3}$$

Schreiben Sie eine Matlab-Skript my_heat, welches für $N = 100$ *und* f *(passend zu* (3)*) das System* $\Delta_N t = f$ *löst. Sie können den "\" Befehl nutzen um das Gleichungssystem zu lösen. Plotten Sie anschließend Ihre Lösung gegen die* $(x_i)_i$ *(siehe Abbildung 2).*

Hinweis. *Für a) nutzen Sie* $T''(x_i) = F(x_i) = f_i$ *sowie* (2) *um* $T''(x_i)$ *abhängig von* t_i, t_{i-1}, t_{i+1} *zu schreiben.*

Bemerkung. *Der oben gezeigte Ansatz wird als "Finite Differenzen" Ansatz bezeichnet und ist ein wichtiges Lösungsverfahren zur Behandlung partieller Differenzialgleichungen. Im Gleichgewicht heißt dabei, dass die Wärmeausbreitung der Temperatur der Wirkung der Wärmequellen genau gegenübersteht, so dass es effektiv zu keiner (zeitlichen) Änderung der Temperatur kommt.*

Aufgabe 3 (Singuläre Matrizen mit leichten Störungen)**.** *Gegeben sei* $\varepsilon \in \mathbb{R}$*, die Matrix* $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ *und der Vektor* $b = (b_1, b_2)^T$.

Bestimmen Sie die Lösung(en) des Systems $A_\varepsilon x = b$ *in Abhängigkeit von* ε *und* b.

Bemerkung. *Dieses Beispiel zeigt, wie stark die Lösung eines Gleichungssystems von der Matrix abhängen kann, falls das System im Grenzwert* ($\varepsilon = 0$) *singulär ist.*

Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

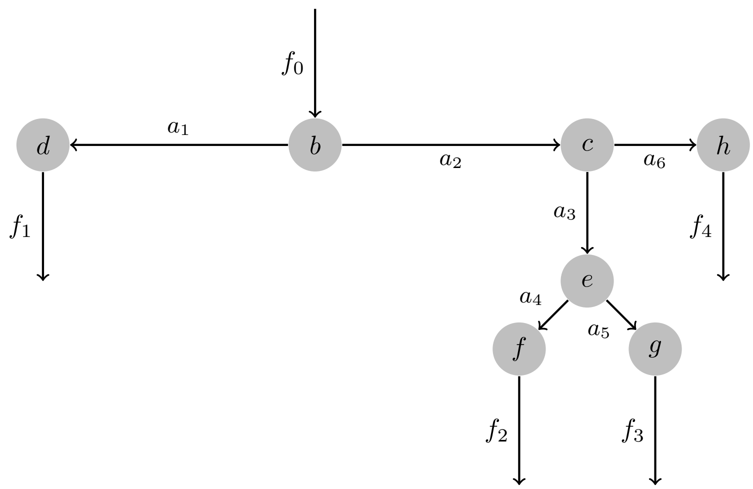

Abbildung 1: Fluss-System: Pfeile zeigen Flussrichtung der Verbindungen, f_0 Einfluss und f_1, f_2, f_3, f_4 Ausfluss aus dem System und a_i die Gewichte in Flussrichtung ($-a_i$ gegen Flussrichtung).

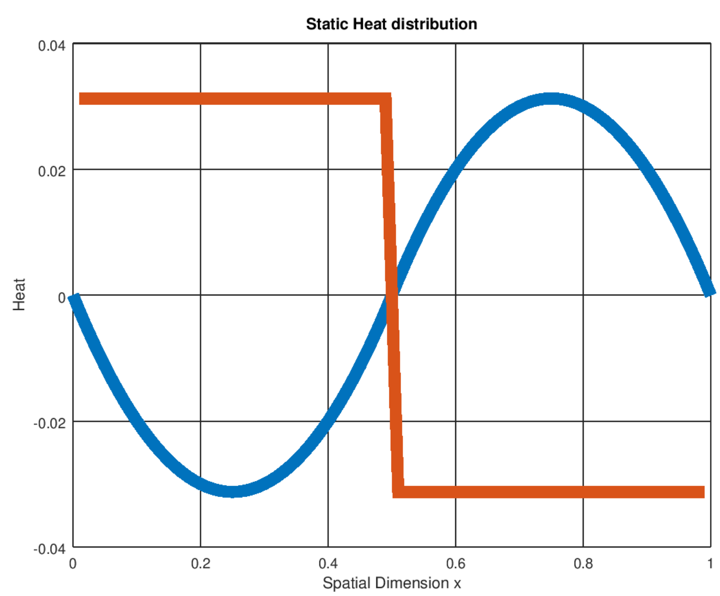

Abbildung 2: Plot der statischen Temperaturverteilung in $x \in [0,1]$ (Ortsdimension des Metalstabs) in Blau, die Wärmequellen (rescaliert sodass in einem Plot sichtbar) in Rot. Um Verwirrung zu vermeiden, hier steht F positiv für Kühlung und F negativ für Heizung.