Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

3. Aufgabenblatt

Aufgabe 1 (Taylor Theorem). *Es ist wohlbekannt, dass man mittels Taylor-Entwicklung stetig differenzierbare Funktionen durch affine lineare Funktionen approximieren kann. Das heißt für Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit $x_0, h \in \mathbb{R}$ bzw. $\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{h} \in \mathbb{R}^m$ gilt $|f(x_0+h) - \overline{f}(x_0+h)| = o(|h|)$ und $\|g(\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{h}) - \overline{g}(\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{h})\| = o(\|\overrightarrow{h}\|)$ mit Taylorpolynom 1. Ordnung $\overline{f}(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h$ bzw. $\overline{g}(\overrightarrow{x_0}+\overrightarrow{h}) = g(\overrightarrow{x_0}) + Dg(\overrightarrow{x_0})\overrightarrow{h}$. Die Notation $o(h)$ steht hierbei stellvertretend für eine nicht genauer benannte Funktion $F(h)$ mit $\lim_{h\to 0} F(h)/|h| = 0$.*

a) *Gegeben sei die Funktion $f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$ auf $\mathbb{R}$, sowie der Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Approximieren Sie die Werte $f(0.5)$, $f(0.2)$, $f(0.1)$ mittels dem Taylorpolynom 1. Ordnung $\overline{f}$ und geben Sie Schranken für den Approximationsfehler an. (Siehe Hinweis und ggf. Taylor Theorem mit Lagrange oder Integral Restglied)*

b) *Gegeben sei die Funktion $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $g(x,y) = (x^3 - xy, sin(xy), e^y)^T$. Stellen Sie das Taylorpolynom 1. Ordnung $\overline{g}$ im Entwicklungspunkt $\overrightarrow{x_0} = (0,1)$ auf und berechnen Sie $\overline{g}(0.5, 2)$.*

Hinweis. *Für die Abschätzung des Fehlers in a) zeigen Sie, dass $|f''(x)| \leq 1.5$ für $x \in [0, 0.5]$ und nutzen Sie eine Darstellung des Restglieds um den Fehler abzuschätzen.*

Bemerkung. *Taylor-Entwicklung ist ein grundlegendes Werkzeug zur Analyse von Fehlerfortpflanzungen, da sie erlaubt die Fehler zu "linearisieren", siehe Aufgabe 2. Der Punkt a) veranschaulicht außerdem, dass die Terme höherer Ordnung – man spricht auch von $\mathcal{O}(h^2)$ – schnell verschwinden und daher für kleines h gegenüber $\overline{f}$ vernachlässigbar sind.*

Aufgabe 2 (Elementare differenzielle Fehlerfortpflanzung). *Gegeben sei $A, B \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, und $f\colon A \to B$, $g\colon B \to \mathbb{R}$ seien stetig differenzierbar in A bzw. B.*

a) *Es sei $x \in A$, $y = f(x) \in B$ und $\delta_x, \delta_y \in \mathbb{R}$ sodass $x + \delta_x \in A$ und $y + \delta_y \in B$. Nutzen Sie das Taylor Theorem um zu zeigen dass*

$$g\big(f(x+\delta_x) + \delta_y\big) - g\big(f(x)\big) = g'(y)f'(x)\delta_x + g'(y)\delta_y + o(|\delta_x| + |\delta_y|) \qquad (1)$$

b) *Es sei $A = B = (0, \infty)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(y) = \frac{1}{y}$ und $\delta_y = \tau f(x)$ für $\tau = 0.01$. Nutzen Sie (1) um für $x = 10$ den Fehler $g(f(x+\delta_x) + \delta_y) - g(f(x))$ (bis auf Terme $o(|\delta_x| + |\delta_y|)$) als Funktion von (δ_x, δ_y) zu bestimmen.*

Hinweis. *Es gilt für eine Konstante c und Variablen $h, \tilde{h}$: $o(ch + \tilde{h} + o(h)) = o(|h| + |\tilde{h}|)$. Mathematisch streng genommen bezeichnet $o(h)$ eine Menge von Funktionen und man müsste mit Inklusionen und Elementen anstatt $''='' $ arbeiten, diese Notation hat sich aber so eingebürgert und ist in der Regel zweckdienlich.*

Bemerkung. *Dieses Beispiel zeigt in kleinem Rahmen wie man Fehlerfortpflanzung berechnen kann. Hier entspricht δ_x dem Fehler in den Daten x und δ_y dem Fehler der in der Berechnung von $f(x)$ entsteht, und (1) zeigt, dass der Fehler δ_x um den Faktor $g'(y)f'(x)$ verstärkt wird, während der Fehler δ_y um $g'(y)$ verstärkt wird. Durch Induktion und Interpretation von δ_y kann man die Formel zur differenziellen Analyse aus der Vorlesung erweitern. Insbesondere sieht man, dass x oder y sodass $f'(x)$ bzw. $g'(y)$ sehr groß sind problematisch sein können.*

Aufgabe 3 (Rechenregeln für absolute und relative Fehler)**.** *Im Folgenden bezeichnet das Symbol* $\overset{\circ}{=}$ *Gleichheit bis auf Terme der Ordnung* $o(\max(|\delta_x|, |\delta_y|))$ *bzw.* $o(\max(|\varepsilon_x|, |\varepsilon_y|))$ *sowie* $\delta_{f(x,y)} = f(\tilde{x}, \tilde{y}) - f(x, y)$ *den absoluten Fehler und* $\varepsilon_{f(x,y)} = \frac{\delta_{f(x,y)}}{f(x,y)}$ *den relativen Fehler unter der Annahme* $\tilde{x} = x + \delta_x$ *und* $\tilde{y} = y + \delta_y$*. Man zeige die folgenden Rechenregeln für den absoluten und relativen Fehler:*

a)
- $\delta_{x\pm y} = \delta_x \pm \delta_y$,
- $\varepsilon_{x\pm y} = \frac{x\varepsilon_x \pm y\varepsilon_y}{x\pm y}$ *falls* $x \pm y \neq 0$,

b)
- $\delta_{x\cdot y} \overset{\circ}{=} x\delta_y + y\delta_x$,
- $\varepsilon_{x\cdot y} \overset{\circ}{=} \varepsilon_x + \varepsilon_y$ *falls* $x, y \neq 0$,

c)
- $\delta_{\frac{x}{y}} \overset{\circ}{=} \frac{y\delta_x - x\delta_y}{y^2}$ *falls* $y \neq 0$.
- $\varepsilon_{\frac{x}{y}} \overset{\circ}{=} \varepsilon_x - \varepsilon_y$ *falls* $x, y \neq 0$,

Hinweis. *Nutzen Sie das Taylor Theorem, wobei die Terme 1. Ordnung die gewünschte Formeln geben, und die Terme höherer Ordnung in die o Terme fallen.*

Bemerkung. *Diese Aufgabe zeigt anhand der Standard-Operationen, wie sich Fehler aus unterschiedlichen Quellen auf den Fehler des Resultats auswirken und kann als Einleitung in die differenzielle Analysis der Fehlerfortpflanzung verstanden werden.*