Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

10. Aufgabenblatt

Definition (Interpolation)**.** *Gegeben $N+1$ Datenpunkte $(x_0, y_0), \dots, (x_N, y_N) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ gibt es ein eindeutiges Polynom P von Grad kleiner gleich N, sodass $P(x_i) = y_i$. Dieses lässt sich mittels den Lagrange-Polynomen für $i = 0, \dots, N$*

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{N} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \tag{1}$$

einfach berechnen, genauer gilt $P(x) = \sum_{i=0}^{N} y_i L_i(x)$.
Für Funktionen $f \in \mathcal{C}^{N+1}([a,b])$ mit $x_i \in [a,b]$ und $f(x_i) = y_i$ stellt sich die Frage, wie ähnlich P der Funktion f ist. Es gilt die Abschätzung

$$|f(x) - P(x)| \leq \max_{\xi \in [a,b]} \frac{|f^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} |w_N(x)| \leq \max_{\xi \in [a,b]} \frac{|f^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} \max_{z \in [a,b]} |w_N(z)|, \tag{2}$$

wobei $w_N(x) = \prod_{i=0}^{N} (x - x_i)$.

Aufgabe 1 (Interpolation)**.** *Gegeben seien die Datenpunkte $(-1,1)$, $(0,-1)$, $(1,2)$ und $(2,4)$. Berechnen Sie das Interpolationspolynom 3.ter Ordnung zu den oben gegebenen Datenpunkten mittels Lagrange-Interpolation.*

Aufgabe 2 (Fehler äqui-distanter Interpolation)**.** *Es sei $N \geq 1$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $h = \frac{(b-a)}{N}$ und äqui-distante Stützstellen $x_k = a + kh$ für $k = 0, \dots, N$. Außerdem definieren wir die Hilfsgröße $w_N^l(x) = \prod_{i=0}^{l} (x - x_i)$.*

- **a)** *Zeigen Sie, dass $w_N^l(z) = (-1)^{l+1} w_N^l(v)$ für $z \in \mathbb{R}$ und $v = x_l - (z - x_0)$.*
- **b)** *Zeigen Sie, dass das Maximum der Funktion $|w_N^l|$ auf $[x_0, x_l]$ in $(x_0, x_0 + \frac{h}{2}]$ angenommen wird.*
- **c)** *Berechnen Sie zunächst das Maximum $\max_{x \in [x_0, x_0 + \frac{h}{2}]} |w_N^1(x)|$. Folgern Sie für $l = 1, \dots, N$*

$$\frac{h^{l+1}}{2} \prod_{j=0}^{l-1} (j + \frac{1}{2}) \leq \max_{x \in [a,b]} |w_N^l(x)| \leq \frac{h^{l+1}}{4} l! \tag{3}$$

Hinweis. *Für b) nutzen Sie vollständige Induktion bezüglich $l \geq 1$. Dabei ist hilfreich, dass $|x - x_l| \geq |z - x_l|$ für alle $x \in [x_0, x_0 + \frac{h}{2}]$, $z \in (x_0 + \frac{h}{2}, x_l]$ sowie die Eigenschaft in a) um den Fall $x \in [x_{l-1}, x_l]$ zu kontrollieren, d.h. dass w_n^l auf $[x_{l-1}, x_l]$ keine betragsmäßig größeren Werte annimmt als auf $(x_0, x_0 + \frac{h}{2}]$. Für c) nutzt man abermals Induktion. Dank b) muss nur $x \in [x_0, x_0 + \frac{h}{2}]$ berücksichtigt werden. Für solche x gilt insbesondere $(l - \frac{1}{2})h \leq |x - x_l| \leq lh$.*

Bemerkung. *Diese Beispiel gibt eine recht gute Abschätzung für $\max_{x \in [a,b]} |w_N(x)|$ ((3) für $l = N$), wodurch sich der Approximationsfehler der Interpolation schätzen lässt. Die Tatsache, dass die Maxima in den Randintervallen $[x_0, x_0 + \frac{h}{2}]$ angenommen werden spiegelt sich oft darin wider, dass bei äqui-distanten Stützstellen die Abweichung zur Funktion zum Rand hin zunimmt, siehe Beispiel 3.*

Richard Huber
richard.huber@uni-graz.at

Matlab-Aufgabe 3 (Lagrange-Interpolation)**.** *Im Folgenden wollen wir ein Matlab-Programm schreiben, welches Interpolation mittel Lagrange-Polynomen durchführt. Mit dem Koeffizienten-Vektor* $a = (a_0, \dots, a_N)$ *assoziieren wir das Polynom* P_N *sodass* $P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$.

a) *Schreiben Sie eine Matlab-Funktion [a]=Lagrange_Polynom(x, i) welche für* $i \in \{0, \dots, N\}$, *und einen Vektor* $x = (x_0, \dots, x_N)$ *von Stützstellen, den Koeffizientenvektor des Lagrange-Polynoms* L_i *berechnet.*

b) *Schreiben Sie eine Matlab-Funktion [val]=evaluate_polynom(a, x) welches für die Koeffizienten* $a = (a_0, \dots, a_N)$ *und einen Wert* $x \in \mathbb{R}$ *den Wert des Polynoms* $P_N(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i$ *berechnet und als val returniert.*

Schreiben Sie des weiteren eine Matlab-Funktion [a]=Lagrange_Interpolation(x,y) welche unter Nutzung von Lagrange-Interpolation für gegebene Stützstellen $x = (x_0, \dots, x_N)$ *und zugehörige Stützwerte* $y = (y_0, \dots, y_N)$ *die Koeffizienten* $a = (a_0, \dots, a_N)$ *des Interpolationspolynoms berechnet.*

c) *Schreiben Sie ein Matlab-Skript welches die Implementierungen nutzt, um für* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ *mit äqui-distanter Stützstellen in* $[-10, 10]$ *und* $y_i = f(x_i)$ *die Interpolation für* $N = 1, \dots, 14$ *zu berechnen. Ploten Sie die Interpolation und die Funktion* f*.(siehe Abbildung 1).*

Hinweis. *Überlegen Sie für a) wie sich der Vektor* a *eines Polynoms* p *ändert, wenn Sie* $p(x) \cdot x$ *berechnen (also* p *mit dem monom* x *multiplizieren) und nutzen Sie dies um iterativ den Vektor zu* L_i *zu erzeugen. Für c) plotten Sie nicht nur auf den Stützpunkten, sondern in einem feineren Gitter um entsprechende Plots zu erhalten.*

Bemerkung. *Unterpunkt c) veranschaulicht den Effekt aus Aufgabe 2, dass bei äqui-distanter Interpolation der Fehler sehr groß werden kann, und insbesondere durch größeres* N *nicht besser wird.*

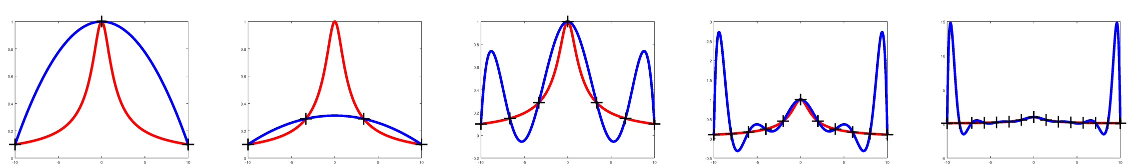

Abbildung 1: Resultate für N=2, 3, 6, 10, 14: Rote Linie zeigt Funktion f, die Blaue die Interpolation, welche starke Oszillationen aufweist.