(1) Geben sie die maximalen Definitionsmengen $D \subset \mathbb{R}$ der folgenden Funktionen an:

$$\text{(a) } f(x) = \sqrt{x^2+1}\, e^x; \qquad \text{(b) } g(x) = \sqrt{x^2-1}\, e^x; \qquad \text{(c) } h(x) = \sqrt{x^2+1}\, \ln x;$$

$$\text{(d) } v(z) = \left(\ln z^2\right) e^z; \qquad \text{(d) } w(z) = \ln\Big(e^z\Big); \qquad u(z) = \frac{z+2}{z^2-1}; \qquad \varphi(z) = \frac{z+2}{\sqrt{z^2-1}}.$$

(2) Bestimmen sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{(a) } f(x) = \frac{x^2}{1+x^2}; \qquad \text{(b) } g(x) = \frac{1+x^2}{x^2} \text{ für } x \neq 0; \qquad \text{(c) } h(x) = \sqrt[3]{x^2+x+1};$$

$$\text{(d) } v(z) = \frac{1}{z} \ln z \text{ für } z > 0; \qquad \text{(d) } w(z) = e^{(z^2)} \left(z + \frac{1}{z}\right) \text{ für } z \neq 0.$$

(3) Bestimmen sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

$$\text{(a) } f(x) = x^2 \cos x - \sin x; \qquad \text{(b) } g(x) = x^2(\cos x - \sin x); \qquad \text{(c) } h(x) = \frac{\cos x - \sin x}{x^2};$$

$$\text{(d) } v(z) = z^2 \cos z - z^{-2} \sin z; \qquad \text{(d) } w(z) = (\cos z - \sin z)^2; \qquad u(z) = \sqrt{2 + \cos z - \sin^2 z}.$$

(4) Finden sie die Nullstellen der folgenden Funktionen:

$$\text{(a) } f(x) = x^2 \cos x; \qquad \text{(b) } g(x) = x^2 \cos 3x; \qquad \text{(c) } h(x) = e^{\cos x}; \qquad \text{(d) } k(x) = (x^2-4)\, e^x;$$

$$\text{(d) } v(z) = \ln(z^2+1); \qquad \text{(d) } w(z) = \ln\Big(z^2 + \frac{1}{2}\Big); \qquad u(z) = \ln(z^2+2).$$

(5) Für die nachstehenden Funktionen sollen auf ihrem jeweiligen Definitionsgebiet lokale Maxima und Minima gefunden werden. Welche der gefundenen Punkte sind auch globale Maxima bzw. Minima?

$$\text{(a) } f : [-2,2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = (x-2)^2\, x; \qquad \text{(b) } g : [-2,2] \to \mathbb{R}, \quad g(x) = (x-2)\, x^2;$$

$$\text{(c) } h : [-2,2] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = (x-2)^2\, x^2; \qquad \text{(d) } u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad u(x) = (x-2)^2\, x^2;$$

(6) Lösen sie die folgenden Anfangswertprobleme (Tipp für (d),(e),(f): Substitutionsregel). Skizzieren sie den Graphen der Lösung.

(a) Suche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\begin{cases} f'(x) = 8x + 2 \\ f(-1) = 1 \end{cases}$;

(b) Suche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\begin{cases} f'(x) = 2f(x) \\ f(1) = 1 \end{cases}$;

(c) Suche $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\begin{cases} f'(x) = 4f(x) - 3 \\ f(0) = 2 \end{cases}$;

(d) Suche $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\begin{cases} f'(x) = f(x)^2 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$;

(e) Suche $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\begin{cases} f'(x) = \frac{2}{f(x)} \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$;

(f) Suche $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit $\begin{cases} f'(x) = -2e^{3f(x)} \\ f(0) = 0 \end{cases}$;

(7) Skizzieren sie den Graphen folgender Funktionen:

$$\text{(a) } f : [0, 6\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3\sin(\frac{x}{2})$$

$$\text{(b) } f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R},\ f(x) = \cos(2x + \pi)$$

$$\text{(c) } f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\tan(x)}{2}$$

(8) Berechnen sie eine Stammfunktion folgender Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{6}$ (b) $f(x) = (2x)^{-\frac{3}{2}}$

(c) $f(x) = \dfrac{-2}{x}$ (d) $f(x) = e^x - \dfrac{2}{x^2} + \cos(2x)$

(e) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 4}{x}$ (f) $f(x) = x\sin(2x)$

(g) $f(x) = 3x\sqrt{x^2 + 1} + x^2$ (h) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{3}$

(9) Berechnen sie folgende bestimmte Integrale

$$\text{(a)} \int_{-2}^{3} \frac{\sqrt{x}}{3}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(b)} \int_{1}^{4} (2x)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{(c)} \int_{1}^{2} \frac{-1}{x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{(d)} \int_{-2}^{-1} e^{2x} - \frac{2}{x^3} + \sin(2x)\,\mathrm{d}x$$

$$\text{(e)} \int_{1}^{3} \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{x^2} \qquad \text{(f)} \int_{-1}^{\pi} x^2 \cos(x)$$

$$\text{(g)} \int_{2}^{3} 3x^2\sqrt{x^3+2} + \sin(\frac{x}{2}) \qquad \text{(h)} \int_{-2}^{\pi} \frac{2x^2}{3e^{3x^3}}$$

(10) Führen sie folgende Vektoroperationen rechnerisch und graphisch aus:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(c)} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{2})\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(11) Normieren sie folgende Vektoren in Euklidischer und Manhattan Norm. Kontrollieren sie ihr Ergebnis mit einer Zeichnung.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(12) Rechnen sie folgende, in Kartesischen Koordinaten gegebene Vektoren in Polarkoordinaten um und Kontrollieren sie ihr Ergebnis mit einer Zeichnung:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(13) Rechnen sie folgende, in Polarkoordinaten gegebene Vektoren in Kartesische Koordinaten um und Kontrollieren sie ihr Ergebnis mit einer Zeichnung:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ \frac{7\pi}{8} \end{pmatrix}$$
$$\text{(c)} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-3\pi}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{(d)} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(14) Berechnen sie folgende Skalarprodukte. Kontrollieren sie ihr Ergebnis mit einer Zeichnung.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(15) Berechnen sie die Länge (mit Euklidischer Norm) und den eingeschlossenen Winkel folgender Vektoren. Kontrollieren sie ihr Ergebnis mit einer Zeichnung.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

(16) Berechnen sie Winkel und Seitenlängen der von folgenden Vektoren aufgespannten Dreiecke. Kontrollieren sie ihr Ergebnis mit einer Zeichnung.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(17) Untersuchen sie die folgenden Gruppen von Vektoren auf linear unabhängigkeit/lineare Abhängigkeit. Vergleichen sie ihre Ergebnisse mit einer Zeichnung.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{5}{2}\\5\end{pmatrix} \qquad \text{(b)}\ \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{(c)}\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} \qquad \text{(d)}\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$$

$$\text{(e)}\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \qquad \text{(f)}\ \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\4\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\text{(g)}\ \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \qquad \text{(h)}\ \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\text{(i)}\ \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\5\\-6\end{pmatrix}$$

(18) Skizzieren sie sie folgende Funktionen mittels Isolinien.

$$\text{(a)}\ f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$$

$$\text{(b)}\ f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\text{(c)}\ f(x_1, x_2) = x_1 x_2$$

(19) Berechnen sie den Gradienten folgender Funktionen und werten sie diesen im angegebenen Punkt aus.

$$\text{(a)}\ f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2) + \cos(x_2), \quad \nabla f(1,2) = ?$$

$$\text{(b)}\ f(x_1, x_2) = (x_1 + \cos(x_2))^2, \quad \nabla f(\pi, 2) = ?$$

$$\text{(c)}\ f(x_1, x_2) = \sqrt{\cos(x_2)^2} - \sin(x_1) x_2, \quad \nabla f(0, -2) = ?$$

$$\text{(d)}\ f(x_1, x_2) = \frac{x_1 + x_2}{x_2^2 + 1}, \quad \nabla f(-1, 1) = ?$$

(20) Berechnen sie folgende Matrix-Vektor Multiplikationen und zeichnen sie den Vektor und das Ergebnis der Multiplikation.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

(a) $\begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \sin(\frac{\pi}{4}) & \cos(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$