INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UND WISSENSCHAFTLICHES
RECHNEN

http://imsc.uni-graz.at/hollerm/teaching/15_16/bildverarbeitung.html

Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 7

Termin: 29. Juni 2016, 12:15-13:45

Aufgabe 7.1: [L^1**-TV Entrauschen**]
Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ ein beschränktes Lipschitz-Gebiet, $u^0 \in L^1(\Omega)$ und $\lambda > 0$.

i) Zeigen Sie, dass das Minimierungsproblem

$$\min_{u \in L^1(\Omega)} \int_\Omega |u - u^0| \, dx + \lambda \mathrm{TV}(u) \tag{$*$}$$

Lösungen besitzt.

ii) Beweisen Sie: Es existiert ein $\lambda_0 > 0$, so dass für alle $\lambda \geq \lambda_0$ gilt: Ist

$$c^* \in \operatorname*{argmin}_{c \in \mathbf{R}} \int_\Omega |c - u^0| \, dx,$$

so ist $u^*(x) = c$ für alle $x \in \Omega$ eine Lösung von ($*$).

iii) Geben Sie ein Beispiel für die Nichteindeutigkeit von Lösungen von ($*$) an.

Aufgabe 7.2: [**Implementierung von variationellem Entrauschen**]
Ziel der Aufgabe ist es, den in der Vorlesung besprochenen primal-dual Algorithmus für variationelles Entrauschen mit H^1 und TV Strafterm und L^2 und L^1 Datenterm zu implementieren.
Für ein Bild $u \in \mathbf{R}^{N \times M}$ und $p \in \mathbf{R}^{N \times M \times 2}$ definieren wir $\delta_x u \in \mathbf{R}^{N \times M}$ als

$$(\delta_x u)_{i,j} = \begin{cases} u_{i+1,j} - u_{i,j} & \text{falls } i \in \{0, \ldots, N-2\}, \\ 0 & \text{falls } i = N-1, \end{cases}$$

$\delta_y u \in \mathbf{R}^{N \times M}$ als

$$(\delta_y u)_{i,j} = \begin{cases} u_{i,j+1} - u_{i,j} & \text{falls } j \in \{0, \ldots, M-2\}, \\ 0 & \text{falls } j = M-1, \end{cases}$$

$\nabla u \in \mathbf{R}^{N \times M \times 2}$ als

$$\nabla u = (\delta_x u, \delta_y u),$$

$|p| \in \mathbf{R}^{N \times M}$ als

$$(|p|)_{i,j} = \sqrt{p_{i,j,1}^2 + p_{i,j,2}^2},$$

$$\|u\|_1 = \sum_{i,j} |u_{i,j}|, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} |u_{i,j}|^2}$$

und für $r, s \in \mathbf{R}^{N \times M \times L}$ mit $L \in \{1, 2\}$ das innere Produkt

$$(r, s) = \sum_{i,j,l} r_{i,j,l} s_{i,j,l}.$$

Für gegebenes $u_0 \in \mathbf{R}^{N\times M}$ möchten wir einen Algorithmus zur Lösung von

$$\min_u \frac{\lambda}{q}\|u-u_0\|_q^q + R(\nabla u), \tag{1}$$

mit $q \in \{1,2\}$ und $R \in \{\||\cdot|\|_1, \frac{1}{2}\||\cdot|\|_2^2\}$, implementieren. Dazu betrachten wir das äquivalente Sattelpunktsproblem

$$\min_u \max_p \, (\nabla u, p) - R^*(p) + \frac{\lambda}{q}\|u-u_0\|_q^q$$

mit $R^*(p^*) := \sup_p (p,p^*) - R(p)$, der konvex-konjugierten von R.

- Leiten sie eine konkrete Form der diskreten Divergenz div : $\mathbf{R}^{N\times M\times 2} \to \mathbf{R}^{N\times M}$ her, so dass $\nabla^* = -\text{div}$ gilt, also konkret $(\nabla u, p) = (u, -\text{div}p)$. Hinweis: Die Divergenz ist durch Rückwärtsdifferenzen beschrieben. Überprüfen sie die Adjungiertheit numerisch.

- Implementieren sie den primal-dual Algorithmus wie folgt:

$$\begin{cases} u^0 = u_0 \in \mathbf{R}^{N\times M},\ \overline{u}^0 = u^0,\ p^0 = 0 \in \mathbf{R}^{N\times M\times 2} \\ \sigma > 0,\ \tau > 0 \text{ such that } 8\sigma\tau \le 1,\ n = 0 \\ \text{Iterate:} \\ \quad p^{n+1} = P_{r,\sigma}(p^n + \sigma\nabla\overline{u}^n) \\ \quad u^{n+1} = Q_{q,\lambda,\tau}(u^n + \tau\text{div}p^{n+1}) \\ \quad \overline{u}^{n+1} = 2u^{n+1} - u^n \end{cases}$$

  wobei

$$(P_{r,\sigma}(p))_{(\cdot,\cdot,m)} = \begin{cases} p_{(\cdot,\cdot,m)}/\text{pointwise\_max}\{1,|p|\} & \text{für } r = 1, \\ p_{(\cdot,\cdot,m)}/(1+\sigma) & \text{für } r = 2, \end{cases}$$

$$Q_{2,\lambda,\tau}(u) = (u + \tau\lambda u_0)/(1+\tau\lambda)$$

  und

$$(Q_{1,\lambda,\tau}(u))_{i,j} = \begin{cases} u - \tau\lambda & \text{falls } u - u_0 > \tau\lambda \\ u + \tau\lambda & \text{falls } u - u_0 < -\tau\lambda \\ u_0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

  Alle obigen Operationen sind punktweise zu verstehen. Testen sie die Konvergenz des Algorithmus indem sie das Zielfunktional aus (1) auf den Iterierten auswerten.

- Schreiben sie eine Funktion *[u,ob_val] = holler(u0,λ,reg_type,dat_type,nr_it)* mit Input ein verrauschtes Bild, einen Regularisierungsparameter $\lambda > 0$, einen String der den Regularisierungstyp angibt (reg_type $\in$ {tv,h1}) einen String der den Typ des Datenterms (dat_type $\in$ {l1,l2}) angibt und die Anzahl an durchzuführenden Iterationen. (Siehe Testskript). Fixieren sie dazu $\sigma = \tau = 1/\sqrt{8}$. Output soll das entrauschte Bild u und die Auswertung des Zielfunktionals über die Iterierten *ob_val* sein.

- Testen sie ihre Funktion an den Bildern *lighthouse_gn.png* und *lighthouse_spn.png* und mit verschiedenen λ, und Regularisierungs- und Datentermen. Schicken sie in der Mail für die Abgabe einen Vorschlag zur Wahl des Inputs für die beiden Beispielbilder.

- Versuchen sie den Zusammenhang zwischen dem vorgeschlagenen Algorithmus und dem primal-dual Algorithmus laut Vorlesung herzuleiten.