INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UND WISSENSCHAFTLICHES
RECHNEN

http://imsc.uni-graz.at/hollerm/teaching/15_16/bildverarbeitung.html

Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 6

Termin: 8. Juni 2016, 12:15-13:45

Aufgabe 6.1: [L^2-Entfalten]
Es sei $u^0 \in L^2(\mathbf{R}^d)$, $k \in L^1(\mathbf{R}^d)$ und $\lambda > 0$. Zeigen Sie:

i) Die Aufgabe

$$\min_{u \in L^2(\mathbf{R}^d)} \int_{\mathbf{R}^d} |u * k - u^0|^2 + \lambda |u|^2 \, \mathrm{d}x$$

hat eine eindeutige Lösung.

ii) Ist $k \in L^2(\mathbf{R}^d)$, so gibt es ein $k_\lambda^* \in L^2(\mathbf{R}^d)$ so dass für die Lösung u^* stets $u^* = u^0 * k_\lambda^*$ gilt.

Aufgabe 6.2: [Gegenbeispiele zur direkten Methode]
Zeigen Sie anhand der folgenden Gegenbeispiele, dass im Allgemeinen bei der direkten Methode mit schwacher Konvergenz weder auf Reflexivität des zugrundeliegenden Banachraums, noch auf Koerzivität oder schwache Unterhalbstetigkeit des Funktionals verzichtet werden kann.

i)

$$F : H^1([0,1]) \to \mathbf{R}_\infty, \qquad F(u) = \begin{cases} \int_0^1 (xu'(x))^2 \, \mathrm{d}x & \text{falls } u(0) = 1,\ u(1) = 0, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Das Funktional, ist von unten beschränkt und schwach unterhalbstetig auf einem Hilbertraum, es existiert jedoch kein Minimierer. Es kann daher nicht koerziv sein.

ii)

$$F : H^{1,1}([0,1]) \to \mathbf{R}_\infty, \qquad \begin{cases} \int_0^1 \sqrt{u(x)^2 + u'(x)^2} \, \mathrm{d}x & \text{falls } u(0) = 0,\ u(1) = 1, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Das Funktional ist von unten beschränkt, schwach unterhalbstetig und koerziv, es existiert jedoch kein Minimierer. Der Raum $H^{1,1}([0,1])$ kann daher nicht reflexiv sein.

iii)

$$F : H^{1,4}([0,1]) \to \mathbf{R}_\infty, \qquad F(u) = \begin{cases} \int_0^1 (1 - u'(x)^2)^2 + u(x)^4 \, \mathrm{d}x & \text{falls } u(0) = u(1) = 0, \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie: Das Funktional ist von unten beschränkt und koerziv auf einem reflexiven Banachraum, es existiert jedoch kein Minimierer. Es kann daher nicht schwach unterhalbstetig sein.

Aufgabe 6.3: [Nicht-koerzives Minimierungsproblem]
Es $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ eine beschränktes Lipschitz Gebiet und $u^0 \in L^2(\Omega)$, $K : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ein linearer, beschränkter Operator. Zeigen Sie, dass das Minimierungsproblem

$$\min_{u \in L^2(\Omega)} \int_\Omega |Ku - u^0|^2 \,\mathrm{d}x + F(u) \quad \text{mit} \quad F(u) = \begin{cases} \lambda |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x & \text{für } u \in H^1(\Omega) \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

eine Lösung besitzt.
Hinweise: Sie können die Poincaré Ungleichung $\|u - \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u\|_2 \leq C\|\nabla u\|_2$ verwenden. Arbeiten sie auf einem geeigneten Unterraum.