UE MAT.382 / SS 2015
Dr. Martin Holler

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UND WISSENSCHAFTLICHES
RECHNEN

http://imsc.uni-graz.at/hollerm/teaching/15_16/bildverarbeitung.html

Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 5

Termin: 1. Juni 2016, 10:15-11:45 (!)

Aufgabe 5.1: [Abtasttheorem]
Zeigen sie: Es seien $B > 0$ und $u \in L^2(\mathbf{R})$ mit $\hat{u}(\xi) = 0$ für $|\xi| > B$. Dann ist u durch die Werte $(u(k\pi/B))_{k\in\mathbf{Z}}$ eindeutig bestimmt und es gilt für alle $x \in \mathbf{R}$:

$$u(x) = \sum_{k\in Z} u\left(\frac{k\pi}{B}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{B}{\pi}\left(x - \frac{k\pi}{B}\right)\right).$$

Hinweis: Sie können verwenden dass $(e_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ mit $e_k(x) = e^{-i\frac{k\pi}{B}x}$ eine Orthonormalbasis von $L^2([-B, B])$ bildet.

Aufgabe 5.2: [Der Alias-Effekt]
Sei $u \in L^2(\mathbf{R})$ mit kompaktem Träger und $B > 0$. Zeigen sie:

i) $\phi(\cdot) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{u}(\cdot + 2Bk) \in L^2([-B, B])$. (Hinweise: Approximieren sie (ϕ, e_k) mit e_k wie oben.

ii) Für fast alle $\xi \in \mathbf{R}$ gilt $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{u}(\xi + 2Bk) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2B} \sum_{k\in\mathbf{Z}} u(\frac{k\pi}{B})e^{-i\frac{k\pi}{B}\xi}$. (Poisson-Formel).

iii) Mit $u_d = \sum_{k\in\mathbf{Z}} u(\frac{k\pi}{B})\delta_{\frac{k\pi}{B}}$, wobei δ_z die Delta-Distribution ist, gilt für fast alle ξ

$$\hat{u_d}(\xi) = \frac{B}{\pi} \sum_{k\in\mathbf{Z}} \hat{u}(\xi + 2Bk).$$

iv) Bestimmen sie u_d aus $\hat{u_d}$ für $u(x) = \cos(\xi_0 x)$ und die Fälle $B > \xi_0$ und $B < \xi_0 < 3B$.

Aufgabe 5.3: [Iterpolation/Unterabtastung]
Schreiben sie eine Funktion, die die Auflösung eines gegebenen Bildes um einen Faktor $r > 0$ erhöht/reduziert. Das Erhöhen der Auflösung sollte durch Fouriertransformation und 0-Fortsetzung der Fourier-Daten erreicht werden. Die Unterabtastung sollte den Alias-Effekt vermeiden. Vergleichen sie ihre Ergebnisse mit den im Testskript gerechneten Ergebnissen.