UE MAT.382 / SS 2015
Dr. Martin Holler

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UND WISSENSCHAFTLICHES
RECHNEN

http://imsc.uni-graz.at/hollerm/teaching/15_16/bildverarbeitung.html

Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 4

Termin: 11. Mai 2016

Aufgabe 4.1: [Fouriertransformation von Polynomen]
Zeigen sie, dass jedes Polynom $p : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_n x^n$ eine reguläre Distribution induziert, letzteres im Sinne dass eine Funktion f existiert so dass T_f mit $T_f(\phi) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\phi(x)\mathrm{d}x$ wohldefiniert und in $\mathcal{S}(\mathbf{R})^*$ ist. Geben sie die Fouriertransformierte von T_f als Ableitungsoperator und Punktauswertung an.

Aufgabe 4.2: [Fourier Slice Theorem]
Für $A \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$, definiere den $m \leq d$ dimensionalen linearen Unterraum $M = \{x \in \mathbf{R}^d \mid Ax = 0\}$. Für $u \in L^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{C})$ definiere weiters $\mathcal{P}_M u : M \to \mathbf{C}$ durch $\mathcal{P}_M u(x) = \int_{M^\perp} u(x+y)\mathrm{d}y$. Für $f \in C(\mathbf{R}^d, \mathbf{C})$ definiere $\mathcal{S}_M f : M \to \mathbf{C}$ durch $\mathcal{S}_M f(x) = f(x)$. Sei $\mathcal{F}_m : L^1(M, \mathbf{C})$ die m-dimensionale Fourier transformation auf M, definiert durch $\mathcal{F}_M u(\xi) = \int_M u(y) e^{-i\xi \cdot y}\,\mathrm{d}y$ (Dies entspricht einer Fouriertransformation auf $\mathbf{R}^m$ und hat die selben Eigenschaften). Zeigen sie

$$\mathcal{F}_m \mathcal{P}_M = \mathcal{S}_M \mathcal{F}_d \quad \text{auf } L^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{C}).$$

Aufgabe 4.3: [Diskrete und schnelle Fouriertransformation]
Für $N \geq 1$ und $u, v \in \mathbf{C}^N$ ist die diskrete Fouriertransformation und deren Inverse gegeben durch

$$(\mathcal{F}u)_l = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} u_k \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i k l}{N}}, \qquad (\mathcal{F}^{-1}v)_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=0}^{N-1} v_l \mathrm{e}^{\frac{2\pi i k l}{N}}.$$

Zeigen Sie:

(i) Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ ist unitär und wird in der Tat durch $\mathcal{F}^{-1}$ invertiert.

(ii) Für die periodische Faltung $u * v$ von $u, v \in \mathbf{C}^N$ folgt

$$(u * v)_k = \sum_{l=0}^{N-1} u_l v_{k-l \mod N} \text{ für } k = 0, \dots N-1 \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{F}(u * v) = \sqrt{N} \mathcal{F}u \mathcal{F}v.$$

(iii) Für N gerade und $l = 0, \dots, N/2 - 1$ gilt:

$$(\mathcal{F}u)_{2l} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} (u_k + u_{k+\frac{N}{2}}) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i k l}{N/2}}, \quad (\mathcal{F}u)_{2l+1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\frac{N}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i l}{N}} (u_k - u_{k+\frac{N}{2}}) \mathrm{e}^{-\frac{2\pi i k l}{N/2}}.$$

(iv) In der Situation $N = 2^n$ für $n \in \mathbf{N}$ kann die diskrete Fouriertransformation und die periodische Faltung der Länge N in $\mathcal{O}(N \log N)$ elementaren Rechenschritten berechnet werden.

Aufgabe 4.4: [Segmentierte Faltung]
Es sei $M = 2^n$ für ein $n \in \mathbf{N}$ und $N = KM$ für ein $K \in \mathbf{N}$. Schreiben Sie ein Programm, welches die diskrete Faltung $u * v \in \mathbf{C}^{N+M-1}$ von $u \in \mathbf{C}^N$ und $v \in \mathbf{C}^M$ in $\mathcal{O}(N \log M)$ wie folgt berechnet:

- Der Vektor u wird in K Segmente der Länge M zerlegt, d.h. $u = [u_0, \ldots, u_{K-1}]$ mit $u_k \in \mathbf{C}^M$ für $k = 0, \ldots, K-1$.
- Jedes Segment u_k wird geeignet mittels der schnellen Fouriertransformation (d.h. in $\mathcal{O}(M \log M)$ Schritten) mit v gefaltet.
- Die Segmente $u_k * v$ werden geeignet zu $u * v$ zusammengesetzt.

Sie können dabei auf vorhandene Implementierungen der schnellen Fouriertransformation (z.B. `fft` in Matlab) zurückgreifen.