



Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 3 Termin: 27. April 2016

Aufgabe 3.1: [Abbildungseigenschaften morphologischer Operatoren (1)]

Es sei $B \subset \mathbf{R}^d$ ein nichtleeres Strukturelement und bezeichne T entweder die Erosion oder Dilatation mit B . Zeigen Sie:

- (i) Für $L > 0$ bildet T die Menge der beschränkten Funktionen mit Lipschitz-Konstante $\leq L$ in sich ab.

Aufgabe 3.2: [Abbildungseigenschaften morphologischer Operatoren (2)]

Mit den Definitionen aus Aufgabe 3.1, zeigen Sie:

- (i) Der Operator T ist nicht-expansiv bezüglich der Supremumsnorm, d.h., $\|T(u) - T(v)\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty$ für alle beschränkten $u, v : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$.

Aufgabe 3.3: [Erosion/Dilatation und partielle Differentialgleichungen]

Es bezeichne $|\cdot|$ eine Norm auf \mathbf{R}^d , $|\cdot|_*$ die zugehörige duale Norm, definiert durch $|x|_* = \sup_{|y| \leq 1} \sum_{i=1}^d x_i y_i$, sowie $tB = \{x \in \mathbf{R}^d \mid |x| \leq t\}$. Zu $u : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ beschränkt definiere $u^-, u^+ : [0, \infty[\times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ durch

$$u^-(t, x) = (u \ominus tB)(x), \quad u^+(t, x) = (u \oplus tB)(x).$$

Zeigen Sie:

- (i) Für $s, t \geq 0$ gilt $u^-(t + s, \cdot) = u^-(t, \cdot) \ominus sB$ und Analoges für die Dilatation.
(ii) In Punkten (t, x) , $t > 0$, $x \in \mathbf{R}^d$ in denen u^- bzw. u^+ differenzierbar ist, gilt

$$\frac{\partial u^-}{\partial t}(t, x) = -|\nabla u^-(t, x)|_* \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u^+}{\partial t}(t, x) = |\nabla u^+(t, x)|_*.$$

Aufgabe 3.4: [Zählen von Kreisen]

Implementieren sie einen Algorithmus (aufbauend auf morphologischen Operationen) der zu einem gegebenen, binären Bild, die Anzahl und Größe der darin vorkommenden Kreise ausgibt (siehe Beispieldiagramm, Beispieldiagramm).