INSTITUT FÜR MATHEMATIK
UND WISSENSCHAFTLICHES
RECHNEN

Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 2

Termin: 13. April 2016

Aufgabe 2.1: [Stetigkeit im p-ten Mittel]
Es sei $1 \leq p < \infty$ und $u \in L^p(\mathbf{R}^d)$. Zeigen sie

$$\|T_h u - u\|_p \overset{h \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Hinweis: Sie können verwenden das die stetigen Funktionen mit kompaktem Träger in $L^p(\mathbf{R}^d)$ dicht liegen.

Aufgabe 2.2: [Wärmeleitungsgleichung]
Für $x \in \mathbf{R}^d$, definiere

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{(4\pi\sigma)^{d/2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{4\sigma}\right).$$

Sei $u_0 : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ beschränkt und stetig. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$u(\sigma, x) = (u_0 * F(\sigma, \cdot))(x)$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \partial_\sigma u(\sigma, x) &= \Delta u(\sigma, x) \quad \text{für } \sigma > 0 \\ u(0, x) &= u_0(x) \quad \text{für } x \in \mathbf{R}^d \end{aligned}$$

löst, letzteres im Sinne von $u(0,x) = \lim_{\sigma \to 0} u(\sigma, x)$.

Aufgabe 2.3: [Faltung als linearer Operator]
Sei $p \in (1, \infty)$ und $p^* = \frac{p}{p-1}$. Mit $k \in L^1(\mathbf{R}^d) \cap L^{p^*}(\mathbf{R}^d)$ definiere $K : L^p(\mathbf{R}^d) \to L^p(\mathbf{R}^d)$ durch $Ku = u * k$. Es bezeichne $\rightharpoonup$ und $\to$ jeweils schwache und starke Konvergenz sowie $v|_\Omega$ die Einschränkung einer Funktion v auf Ω. Zeigen Sie, für $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ beschränkt folgt: Falls $u^k \rightharpoonup u$ in $L^p(\mathbf{R}^d)$ für $k \to \infty$, dann gilt $Ku^k|_\Omega \to Ku|_\Omega$ für $k \to \infty$ in $L^p(\Omega)$.

Aufgabe 2.4: [Implementierung von Bilateralfiltern]
Schreiben Sie ein Programm, welches eine diskrete Version des zweidimensionalen Bilateralfilters

$$B_{g,h}u(x) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} u(y)h(x-y)g\big(u(x)-u(y)\big)\,\mathrm{d}y}{\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} h(x-y)g\big(u(x)-u(y)\big)\,\mathrm{d}y}$$

für das Bild $u : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, die Filtermaske $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ und Gewichtsfunktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ berechnet. Es soll folgende Anforderungen erfüllen:

- Die Diskretisierung des Integrals wird durch Punktauswertung und Summation realisiert.
- Die Filtermaske erfüllt $h = \chi_{B_r(0)}$ für einen Parameter $r > 0$ und die Gewichtsfunktion erfüllt $g(t) = \exp(-t^2/\sigma^2)$ für einen Parameter $\sigma > 0$.
- Die Größe eines diskretes Bildes $U : \{1, \ldots, N\} \to \{1, \ldots, M\} \to \mathbf{R}$ wird durch die Bilateralfilterung nicht verändert (d.h. geeignete Fortsetzungsstrategien werden verwendet).