



Mathematische Bildverarbeitung

Übungsblatt 1

Termin: Montag, 14. März 2015

Aufgabe 1.1: [Translation und Skalierung auf L^p -Räumen]

Es bezeichne T_y und D_A jeweils den Verschiebungoperator um $y \in \mathbf{R}^d$ und den mit $A \in \mathbf{R}^{d \times d}$ assoziierten Skalierungsoperator. Es sei $p \in [1, \infty]$.

Zeigen Sie:

- Für jedes y ist $T_y : L^p(\mathbf{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbf{R}^d)$ wohldefiniert und ein stetiger linearer Operator.
- Für A regulär ist $D_A : L^p(\mathbf{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbf{R}^d)$ wohldefiniert und ein stetiger linearer Operator.
- Die Menge der Operatoren

$$\{T \mid T = D_A T_y, y \in \mathbf{R}^d, A \in \mathbf{R}^{d \times d} \text{ regulär}\}$$

auf $L^p(\mathbf{R}^d)$ bilden eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung.

Aufgabe 1.2: [Histogramm stetig differenzierbarer Funktionen]

Es sei $\Omega = (0, 1)^d$ und $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ stetig differenzierbar mit $\nabla u(x) \neq 0$ in Ω . Zeigen Sie: Abzählbare Mengen sind Nullmengen des Histogramms H_u (bezüglich des Lebesgue-Maßes auf Ω), d.h. $H_u(E) = 0$ für jedes (höchstens) abzählbare E .

Aufgabe 1.3: [Konkretes Histogramm]

Es sei $\Omega = [0, 1]^2$. Berechnen Sie das Histogramm der Funktion $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{falls } (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \lfloor x_2 + \frac{1}{2} \rfloor + \frac{1}{4} & \text{sonst} \end{cases}$$

bezüglich des Lebesgue-Maßes auf Ω .

Aufgabe 1.4: [Implementierung von Rotationsoperatoren]

Schreiben Sie ein Programm, welches ein diskretes Bild U um den Winkel θ dreht. Dieses soll folgende Anforderungen erfüllen:

- Das diskrete Eingangsbild U wird bilinear interpoliert.
- Das interpolierte Bild wird durch den zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

assoziierten Rotationsoperator gedreht.

- Das gedrehte (kontinuierliche) Bild wird mittels Punktabtastung in ein diskretes verwandelt (mit entsprechender Größe und Grenzen).