



# Mathematische Bildverarbeitung

## Übungsblatt 1

Termin: Montag, 14. März 2015

### Aufgabe 1.1: [Translation und Skalierung auf $L^p$ -Räumen]

Es bezeichne  $T_y$  und  $D_A$  jeweils den Verschiebungoperator um  $y \in \mathbf{R}^d$  und den mit  $A \in \mathbf{R}^{d \times d}$  assoziierten Skalierungsoperator. Es sei  $p \in [1, \infty]$ .

Zeigen Sie:

- Für jedes  $y$  ist  $T_y : L^p(\mathbf{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbf{R}^d)$  wohldefiniert und ein stetiger linearer Operator.
- Für  $A$  regulär ist  $D_A : L^p(\mathbf{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbf{R}^d)$  wohldefiniert und ein stetiger linearer Operator.
- Die Menge der Operatoren

$$\{T \mid T = D_A T_y, y \in \mathbf{R}^d, A \in \mathbf{R}^{d \times d} \text{ regulär}\}$$

auf  $L^p(\mathbf{R}^d)$  bilden eine Gruppe bezüglich Hintereinanderausführung.

### Aufgabe 1.2: [Histogramm stetig differenzierbarer Funktionen]

Es sei  $\Omega = (0, 1)^d$  und  $u : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  stetig differenzierbar mit  $\nabla u(x) \neq 0$  in  $\Omega$ . Zeigen Sie: Abzählbare Mengen sind Nullmengen des Histogramms  $H_u$  (bezüglich des Lebesgue-Maßes auf  $\Omega$ ), d.h.  $H_u(E) = 0$  für jedes (höchstens) abzählbare  $E$ .

### Aufgabe 1.3: [Konkretes Histogramm]

Es sei  $\Omega = [0, 1]^2$ . Berechnen Sie das Histogramm der Funktion  $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$

$$u(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1 & \text{falls } (x_1 - \frac{1}{2})^2 + (x_2 - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \lfloor x_2 + \frac{1}{2} \rfloor + \frac{1}{4} & \text{sonst} \end{cases}$$

bezüglich des Lebesgue-Maßes auf  $\Omega$ .

### Aufgabe 1.4: [Implementierung von Rotationsoperatoren]

Schreiben Sie ein Programm, welches ein diskretes Bild  $U$  um den Winkel  $\theta$  dreht. Dieses soll folgende Anforderungen erfüllen:

- Das diskrete Eingangsbild  $U$  wird bilinear interpoliert.
- Das interpolierte Bild wird durch den zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

assoziierten Rotationsoperator gedreht.

- Das gedrehte (kontinuierliche) Bild wird mittels Punktabtastung in ein diskretes verwandelt (mit entsprechender Größe und Grenzen).