Kurzfassung

Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften

Stefan Hergarten
Institut für Erdwissenschaften
Karl-Franzens-Universität Graz

Wintersemester 2011/12
Stand: 18. Januar 2012

Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften
Stefan Hergarten
Wintersemester 2011/12

Inhaltsverzeichnis

Mathematik für Studierende der Erdwissenschaften
Stefan Hergarten
Wintersemester 2011/12

1 Analysis einer Veränderlichen

1.1 Funktionen

Der Begriff der Funktion (Abbildung, Zuordnung) sollte aus der Schule bekannt sein. Eine Funktion ordnet jedem Element der sogenannten Definitionsmenge *genau ein* Element der sogenannten Wertemenge zu.

Ein Beispiel ist die Zuordnung von Matrikelnummern zu Studierenden. Definitionsmenge ist die Menge aller Studierenden, Wertemenge die Menge der natürlichen Zahlen. Damit es sich hierbei um eine Funktion handelt, muss jede(r) Studierende genau eine Matrikelnummer haben.

Falls wir Studierenden statt der Matrikelnummer ihr Alter (z. B. als ganze Zahl in Jahren) zuordnen, wird mehreren Elementen der Definitionsmenge dasselbe Element der Wertemenge zugeordnet. In diesem Fall handelt es sich noch immer um eine Funktion, allerdings ist diese nicht mehr umkehrbar. Dies bedeutet, dass es keine Funktion gibt, welche einem Alter eindeutig eine Person zuordnet.

Die Analysis einer Veränderlichen befasst sich mit Funktionen, deren Definitions- und Wertemenge jeweils die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bzw. eine Teilmenge derer ist.

Zur Festlegung einer Funktion benötigen wir eine Definitionsmenge und eine Abbildungsvorschrift, z. B. $f(x) = \frac{1}{x}$. f ist der (beliebig gewählte) Funktionsname. Die Bezeichnung x ist ebenfalls willkürlich, d. h. $f(x) = \frac{1}{x}$ und $f(t) = \frac{1}{t}$ bezeichnen dieselbe Funktion. Hat die Variable einer Funktion eine physikalische Bedeutung, sollte man eine Bezeichnung wählen, die diese Bedeutung widerspiegelt (z. B. t für Zeit, T für Temperatur). Der Funktionsname sollte nach Möglichkeit ebenfalls die physikalische Bedeutung widerspiegeln, z. B. $T(t)$ für eine zeitabhängige Temperatur oder $\eta(T)$ für die Viskosität einer Flüssigkeit, welche von der Temperatur abhängt.

Wird die Definitionsmenge einer Funktion nicht explizit angegeben, gehen wir entweder von den Werten aus, die sich sinnvoll in die Abbildungsvorschrift einsetzen lassen (z. B. alle reellen Zahlen ohne die Null bei $f(x) = \frac{1}{x}$) oder von dem, was physikalisch sinnvoll ist (z. B. positive Werte, wenn es sich um eine absolute Temperatur handelt).

Ein zentraler Begriff in der Analysis ist die Stetigkeit von Funktionen. Anschaulich betrachtet ist eine Funktion stetig, wenn der Funktionsgraph keine Sprünge aufweist. Formal wird Stetigkeit mit Hilfe von Grenzwerten oder über das (hoffentlich aus der Schule bekannte) ϵ-δ-Kriterium definiert.

Für die anschauliche Darstellung einer Funktion verwendet man meist den Funktionsgraphen.

Bei der Beschreibung natürlicher Phänomene kommen häufig Funktionen mehrerer Variablen vor. So ist z. B. die Dichte ρ eines idealen Gases eine Funktion des Druckes p und der Temperatur T:

$$\rho(p, T) = \frac{M}{R}\frac{p}{T},$$

wobei M die Molmasse und R die Gaskonstante ist. Funktionen mehrerer Variablen werden im zweiten Kapitel behandelt.

1.2 Ableitungen

Oftmals interessiert man sich dafür, wie sich eine Funktion ändert, wenn man die Variable variiert, z. B. ob und wie stark eine Temperatur mit der Zeit steigt oder fällt. Dies wird durch den Begriff der Ableitung beschrieben. Um diese zu bestimmen, betrachtet man zunächst eine Gerade, die den Graphen der Funktion f in den Punkten $(x, f(x))$ und $(x+h, f(x+h))$ schneidet. Diese hat die Steigung

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

welche auch als Differenzenquotient bezeichnet wird. Falls dieser für $h \to 0$ (d. h., wenn sich die beiden Punkte beliebig nahe kommen) konvergiert, ist die Funktion f an der Stelle x differenzierbar, und

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

wird als Ableitung der Funktion f an der Stelle x bezeichnet. Ebenfalls gebräuchlich sind die Symbole $\frac{d}{dx}f(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}(x)$ (sowie diese mit ∂ statt d) statt $f'(x)$. Falls es sich bei der Funktionsvariable um die Zeit handelt, wird oft die Bezeichnung $\dot{f}(t)$ statt $f'(t)$ verwendet.

Nicht differenzierbar ist beispielsweise die Funktion $f(x) = |x|$ an der Stelle $x = 0$. Der Differenzenquotient ist 1 für $h > 0$ und -1 für $h < 0$, besitzt also keinen Grenzwert für $h \to 0$. Ebenfalls nicht differenzierbar an der Stelle $x = 0$ ist die (nur für $x \geq 0$ definierte) Funktion $f(x) = \sqrt{x}$, da der Differenzenquotient für $h \to 0$ gegen unendlich strebt.

Handelt es sich um physikalische Größen, besitzt der Diffenrenzenquotient und damit die Ableitung Einheiten. Ist beispielsweise $s(t)$ die zur Zeit t zurückgelegte Strecke (Einheit: m), so ist $v(t) = \dot{s}(t)$ die Geschwindigkeit mit der Einheit m/s. Deren Ableitung $a(t) = \dot{v}(t)$ heißt Beschleunigung und hat die Einheit m/s^2.

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x ist die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen am entsprechenden Punkt. Hieraus lassen sich Ableitungen aus Funktionsgraphen schätzen. Man zeichnet Tangenten an verschiedene Punkte des Graphen und misst oder schätzt deren Steigung. Dort wo die Funktion steigt, ist die Ableitung positiv, wo sie fällt, negativ. An Minima und Maxima ist die Ableitung null.

Mit Hilfe der Ableitung lassen sich Funktionen linear annäheren. Ist f an der Stelle x differenzierbar, so gilt für kleine Werte von h:

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

sodass

$$f(x+h) \approx f(x) + f'(x)\,h$$

Geometrisch bedeutet dies, dass der Funktionsgraph durch seine Tangente angenähert wird.

1.3 Ableitungsregeln

Im Prinzip lässt sich der Grenzwert des Differenzenquotienten für beliebige Funktionen direkt berechnen. Bequemer geht es allerdings, wenn man die Ableitungen einiger weniger Funktionen sowie die drei (bzw. vier) wichtigsten Ableitungsregeln weiß.

Die am einfachsten abzuleitenden Funktionen sind:

- Für $f(x) = \text{const}$ ist $f'(x) = 0$.
- Für $f(x) = x$ ist $f'(x) = 1$.

Die drei grundlegenden Ableitungsregeln sind:

Summenregel: Die Ableitung der Summe zweier Funktionen ist die Summe der Ableitungen:

$$\frac{d}{dx}\,(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

Produktregel: Für die Ableitung des Produkts zweier Funktionen gilt:

$$\frac{d}{dx}\,(f(x)\,g(x)) = f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)$$

Die Produktregel lässt sich veranschaulichen über die Fläche eines Rechtecks, dessen Kantenlängen sich mit der Zeit ändern.

Kettenregel: Die Kettenregel behandelt die Ableitung ineinander geschachtelter Funktionen:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))\,g'(x)$$

Merkregel: Äußere Ableitung mal innere Ableitung.

Die Kettenregel ist weniger kompliziert als sie aussieht. Beispiel: Die Temperatur in der Erdkruste nimmt mit der Tiefe um $0.03\,{}^\circ\text{C/m}$ zu. Wir fahren mit einer Geschwindigkeit von $2\,\text{m/s}$ in einen vertikalen Stollen. Wie schnell nimmt die Temperatur für uns zu? Ist $z(t)$ die Tiefe zur Zeit und $T(z)$ die Temperatur in der Tiefe z, so ist $T(z(t))$ die Temperatur in der Tiefe, in der wir zur Zeit t gerade sind. Nach Kettenregel ist dann

$$\frac{d}{dt} T(z(t)) = T'(z(t))\,\dot{z}(t) = 0.03\,{}^\circ\text{C/m} \cdot 2\,\text{m/s} = 0.06\,{}^\circ\text{C/s}$$

Dieses Ergebnis hätten wir natürlich auch sofort raten können, aber viel mehr steckt nicht hinter der Kettenregel.

Mit Hilfe dieser Regeln lassen sich ziemlich alle Funktionen, die Ihnen begegnen werden, ableiten. Dennoch sind in der Praxis ein paar weitere Regeln nützlich:

Multiplikation einer Funktion mit einer Konstanten:

$$\frac{d}{dx}\left(c\, f(x)\right) = c\, f'(x)$$

Dies ist ein einfacher Spezialfall der Produktregel.

Quotientenregel:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

Diese lässt sich ebenfalls direkt aus der Produktregel ableiten, indem man die Beziehung

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\, g(x)\right) = \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}\, g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}\, g'(x)$$

nach $\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)}$ auflöst.

Potenzregel:

$$\frac{d}{dx}x^n = n\, x^{n-1}$$

für natürliche Zahlen n. Diese lässt sich beispielsweise aus der Produktregel durch vollständige Induktion beweisen. In Abschnitt 1.7 werden wir sehen, dass die Regel auch gilt, wenn n keine ganze Zahl ist.

Ableitung der Umkehrfunktion: Ist g die Umkehrfunktion von f, d. h. $g(f(x)) = x$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f, gilt

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))}$$

Dies sieht man sofort, wenn man die Kettenregel auf die Beziehung $g(f(x)) = x$ anwendet.

Mit Hilfe dieser Regel lässt sich z. B. die Ableitung der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ berechnen. Deren Umkehrfunktion ist $g(y) = y^2$, sodass $g'(y) = 2x$ und damit

$$f'(x) = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{2f(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(1+x^2)^3},$$

und finden Sie heraus, für welchen Wert x die Funktion $f(x)$ maximal wird!

Aufgabe 2

(a) Leiten Sie die Funktionen

$$A(r) = \pi\, r^2 \qquad \text{und} \qquad V(r) = \tfrac{4}{3}\,\pi\, r^3$$

ab!

(b) Suchen Sie die Formeln für die Fläche und den Umfang eines Kreises vom Radius r und die Formeln für das Volumen und die Oberfläche einer Kugel vom Radius r, und vergleichen Sie diese mit den in Aufgabenteil (a) erhaltenen Ergebnissen! Erklären Sie den Zusammenhang anschaulich!

(c) Wiederholen Sie die Überlegungen aus Aufgabenteil (b) für Fläche und Umfang eines Quadrats der Kantenlänge a und für Volumen und Oberfläche eines Würfels der Kantenlänge a! Welcher Unterschied ergibt sich gegenüber Kreis bzw. Kugel?

Aufgabe 3

Abbildung 1 zeigt das Schanzenprofil der Bergisel-Schanze. Der Aufsprunghügel hat folgende Daten:

- Die Steigung ist am sogenannten K-Punkt maximal und beträgt dort 0.68.
- Die horizontale Entfernung zwischen K-Punkt und Schanzentisch beträgt 100 m.
- Der höchste Punkt des Aufsprunghügels (senkrecht unter dem Schanzentisch) liegt 54 m höher als der K-Punkt.

Bestimmen Sie eine Funktion der Form

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

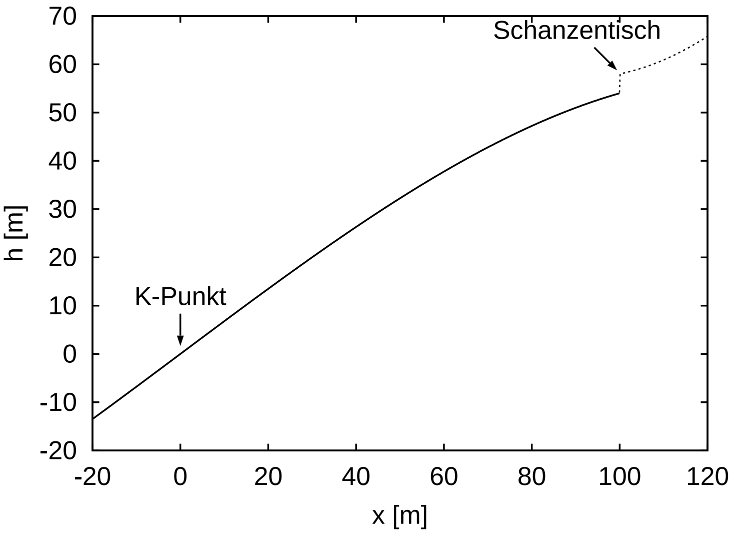

Abbildung 1: Schanzenprofil der Bergisel-Schanze

(ein sogenanntes Polynom dritten Grades) mit geeigneten Werten a, b, c und d, welche die obigen Bedigungen erfüllt. Ließe sich die Aufgabe auch mit einer Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

lösen?

1.4 Die Exponentialfunktion

Gibt es eine Funktion, deren Graph an jeder Stelle genau so stark steigt wie der Funktionswert ist? Die bedeutet, dass eine solche Funktion die Bedingung $f'(x) = f(x)$ für alle x erfüllen muss.

Die Skizze in Abbildung 2 veranschaulicht, dass es zumindest eine solche Funktion (außer der Nullfunktion $f(x) = 0$) geben sollte. Die analytische Darstellung funktioniert allerdings nicht direkt mit Hilfe der Funktionen, die wir schon kennen. Versuchen wir beispielsweise einen Ansatz als Polynom vom Grad n:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$

erhalten wir:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1}$$

und damit: $a_0 = a_1$, $a_1 = 2a_2$, $a_2 = 3a_3$, ..., aber $a_n = 0$, sodass schließlich alle Koeffizienten $a_i = 0$ sein müssen. Damit hätten wir die Nullfunktion $f(x) = 0$ als einzige Lösung gefunden.

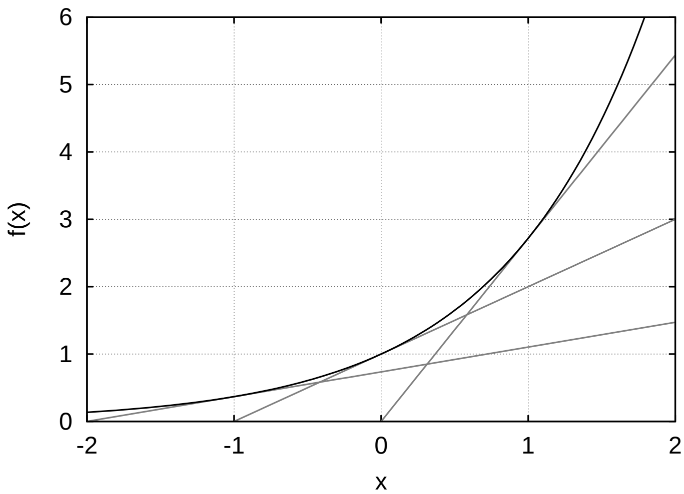

Abbildung 2: Eine Funktion, für die $f'(x) = f(x)$ gilt

Wenn wir den Polynomansatz auf eine unendliche Summe (eine sogenannte Reihe)

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$$

erweitern, finden wir jedoch weitere Lösungen, z. B. $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{6}$, $a_4 = \frac{1}{24}$, ...

Diese Funktion, also

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

wird als Exponentialfunktion bezeichnet, wobei $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ die Fakultät der Zahl n bezeichnet.

Die Exponentialfunktion hat (zunächst) nichts mit „e hoch x“ zu tun!

Die wichtigsten Eigenschaften der Exponentialfunktion sind:

1. $\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x)$ (schon bekannt)
2. $\exp(0) = 1$
3. $\exp(x + y) = \exp(x) \exp(y)$

   Dieses Ergebnis erhält man relativ leicht, indem man die Funktion $f(x) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ betrachtet. Für diese gilt nämlich nach Quotienten- und Kettenregel sowie Eigenschaft 1: $f'(x) = 0$, d. h. $f(x) = \text{const}$. Durch Einsetzen von $x = 0$ folgt dann sofort $f(x) = f(0) = \exp(y)$.
4. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (folgt direkt aus der zweiten und der dritten Eigenschaft)

Übungsaufgaben

Aufgabe 4

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = x^n \exp(-x)$$

für $x \geq 0$, wobei n eine (feste) natürliche Zahl ist. Berechnen Sie, für welchen Wert von x die Funktion maximal wird, und skizzieren Sie den Graphen der Funktion für verschiedene Werte n!

1.5 Differentialgleichungen

Die erste und die zweite Eigenschaft legen die Exponentialfunktion eindeutig fest, d. h. es gibt genau eine Funktion f mit den Eigenschaften $f'(x) = f(x)$ und $f(0) = 1$.

Eine Gleichung, welche eine Beziehung zwischen einer Funktion und ihrer Ableitung aufstellt (also z. B. $f'(x) = f(x)$), wird als Differentialgleichung bezeichnet. Eine Bedingung, welche den Funktionswert an einer Stelle festlegt (also z. B. $f(0) = 1$), heißt Anfangsbedingung. Die Kombination aus Differentialgleichung und Anfangsbedingung wird als Anfangswertaufgabe bezeichnet.

In den Naturwissenschaften kommt oft die Anfangswertaufgabe

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lambda\, f(t) \quad \text{mit} \quad f(0) = f_0$$

vor, wobei λ und f_0 gegebene Konstanten sind. Positive Werte von λ treten bei Wachstumsprozessen auf, negative bei Zerfallsprozessen. Diese Anfangswertaufgabe ist mit Hilfe der Kettenregel leicht zu lösen, denn es ist

$$\frac{d}{dt} \exp(\lambda t) = \lambda \exp(\lambda t)$$

sodass $f(t) = f_0 \exp(\lambda t)$ die Lösung der Anfangswertaufgabe ist.

Viele Anfangswertaufgaben lassen sich allerdings nur mit irgendwelchen nicht sehr naheliegenden Tricks lösen, die meisten sind überhaupt nicht analytisch lösbar. Oftmals kann man aber bereits aus der Differentialgleichung wichtige Eigenschaften der Lösung erkennen, ohne diese explizit zu berechnen.

Übungsaufgaben

Aufgabe 5

Wir betrachten ein begrenztes Wachstum nach dem sogenannten logistischen Modell. Gegenüber dem obigen einfachen Wachstumsmodell wird ein negativer quadratischer Term hinzugefügt, der das Wachstum begrenzt, wenn die Population zu groß wird:

$$\frac{d}{dt} f(t) = \lambda\, f(t) - \mu\, f(t)^2$$

(a) Wie wird sich $f(t)$ verhalten, solange $f(t)$ hinreichend klein ist?

(b) Was passiert, wenn für irgendeine Zeit $f(t) = \frac{\lambda}{\mu}$ ist?

(c) Wie verhält sich $f(t)$, wenn $f(t) < \frac{\lambda}{\mu}$ ist? Was gilt umgekehrt, wenn $f(t) > \frac{\lambda}{\mu}$ ist?

Aus den Ergebnissen der Aufgabe kann man schließen, dass $f(t)$ für kleine Anfangswerte zunächst exponentiell wächst. Mit größer werdendem $f(t)$ verlangsamt sich das Wachstum, bis die Lösung für $t \to \infty$ gegen die Konstante $\frac{\lambda}{\mu}$ konvergiert.

Aufgabe 6

In dieser Aufgabe berechnen wir den Luftdruck p in der Atmosphäre als Funktion der Höhe über Normalnull z. Hierfür verwenden wie die Gleichung einer ruhenden Flüssigkeit, die auch für Gase gilt (auch als hydrostatische Gleichung bezeichnet):

$$\frac{d}{dz} p(z) = -\rho(z)\, g$$

wobei $\rho(z)$ die Dichte und g die Erdbeschleunigung ist. Weiters nehmen wir an, dass Luft ein ideales Gas ist, sodass gilt:

$$\rho = \frac{M}{R}\,\frac{p}{T},$$

wobei M die Molmasse, R die Gaskonstante, und T die Temperatur ist.

(a) Zunächst gehen wir davon aus, dass die Temperatur konstant ist und der Jahresmitteltemperatur von 287 K der Erdoberfläche entspricht. Schreiben Sie die resultierende Differentialgleichung für $p(z)$ auf, und lösen Sie diese mit der Anfangsbedingung $p(0) = 1013$ mbar! Skizzieren Sie die Lösung im Bereich von $z = 0$ bis $z = 50$ km!

(b) Die in Aufgabenteil (a) gefundene Lösung ist nicht ganz realistisch, weil die Temperatur nicht konstant ist, sondern mit der Höhe abnimmt. Überlegen Sie, ob der tatsächliche Druck höher oder niedriger als der in Aufgabenteil (a) berechnete ist!

1.6 Der natürliche Logarithmus

Da die Exponentialfunktion streng monoton steigt (d. h. $\exp(x) > \exp(y)$ wenn $x > y$), ist sie umkehrbar. Dies bedeutet, dass es genau eine Umkehrfunktion f gibt, sodass

$$f(\exp(x)) = x \quad \text{bzw.} \quad \exp(f(x)) = x$$

ist. Diese wird als natürlicher Logarithmus bezeichnet und meist mit ln abgekürzt. In der Informatik und in der englischsprachigen Literatur ist allerdings auch die Abkürzung log üblich. Häufig lässt man die ansonsten bei Funktionen verwendeten Argumentklammern weg, d. h. man schreibt $\ln x$ statt $\ln(x)$.

Der Definitionsbereich der Exponentialfunktion ist $\mathbb{R}$, ihre Werte sind jedoch immer positiv. Daher ist der Definitionsbereich des natürlichen Logarithmus die Menge der positiven reellen Zahlen.

Die wichtigsten Eigenschaften des natürlichen Logarithmus ergeben sich direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der Exponentialfunktion:

1. $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$, denn aus $\exp(\ln x) = x$ folgt mit Hilfe der Kettenregel $\exp(\ln x) \frac{d}{dx} \ln x = 1$.
2. $\ln 1 = 0$
3. $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, denn es gilt:
$$\ln x + \ln y = \ln(\exp(\ln x + \ln y)) = \ln(\exp(\ln(x)) \exp(\ln y)) = \ln(xy)$$
4. $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln x$ (folgt direkt aus der zweiten und der dritten Eigenschaft)

Übungsaufgaben

Aufgabe 7

Geben Sie zu den folgenden Funktionen die Definitionsmengen an, und leiten Sie die Funktionen ab!

(a) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{a}\right)$ mit $a = \text{const.}$

(b) $f(x) = \ln(\ln x)$

(c) $f(x) = \ln(\sqrt{x})$

(d) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

Aufgabe 8

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = \exp(-x) - \exp(-ax)$$

für $x \geq 0$, wobei a eine (feste) reelle Zahl mit $a > 1$ ist. Berechnen Sie, für welchen Wert von x die Funktion maximal wird, und skizzieren Sie den Graphen der Funktion für verschiedene Werte a!

1.7 Beliebige Potenzen

Wir wissen bereits, was a^n für beliebige reelle Zahlen a und natürliche Zahlen n ist. Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus können nun benutzt werden, um beliebige Potenzen zu definieren. Für positive reelle Zahlen a und natürliche Zahlen n gilt nämlich:

$$a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = \exp(\ln a)\ \exp(\ln a) \ldots \exp(\ln a) = \exp(\ln a + \ln a + \ldots + \ln a) = \exp(n \ln a)$$

Wir verallgemeinern dies für beliebige reelle Zahlen x:

$$a^x = \exp(x\ \ln a)$$

Mit der Eulerschen Zahl $e = \exp(1) = 2.718\ldots$ gilt:

$$e^x = \exp(x\ \ln e) = \exp(x\ \ln(\exp(1))) = \exp(x)$$

sodass wir nun auch e^x statt $\exp(x)$ schreiben können, wenn wir unbedingt wollen.

Damit gelten auch für beliebige Potenzen die bekannten Regeln

$$a^{x+y} = \exp((x+y) \ln a) = \exp(x \ln a + y \ln a) = \exp(x \ln a)\ \exp(y \ln a) = a^x\, a^y$$

und

$$(ab)^x = \exp(x \ln(ab)) = \exp(x(\ln a + \ln b)) = \exp(x \ln a)\ \exp(x \ln b) = a^x\, b^x$$

sowie die Ableitungsregel für x^a mit beliebigem Exponenten a:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^a &= \frac{d}{dx} \exp(a\ \ln x) = \exp(a\ \ln x)\, a\, \frac{1}{x} = \exp(a\ \ln x)\, a\, \exp(-\ln x) = a\, \exp(a\ \ln x - \ln x) \\ &= a\, x^{a-1} \end{aligned}$$

für $x > 0$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 9

Geben Sie zu den folgenden Funktionen die Definitionsmengen an, und leiten Sie die Funktionen ab!

(a) $f(x) = a^x$ mit $a =$ const.

(b) $f(x) = x^x$

1.8 Logarithmen zu beliebigen Basen

Die Umkehrfunktion zur Funktion $f(x) = a^x$ mit $a > 0$ wird als Logarithmus zur Basis a bezeichnet und mit $\log_a$ abgekürzt. Der natürliche Logarithmus ist demnach der Logarithmus zur Basis e.

Es gilt:

$$\ln x = \ln\left(a^{\log_a x}\right) = \ln\left(\exp(\log_a x \ln a)\right) = \log_a x \ln a$$

sodass

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Logarithmen zu verschiedenen Basen unterscheiden sich also nur um feste Faktoren.

Die Bezeichnung log ohne Angabe einer Basis steht oft für den Logarithmus zur Basis 10, in der Informatik und in der englischsprachigen Literatur aber eher für den natürlichen Logarithmus.

Fast alle Rechenregeln für natürliche Logarithmen aus dem vorletzten Abschnitt gelten auch für Logarithmen zu beliebiger Basis, lediglich die Ableitung sieht anders aus:

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \ln a}$$

1.9 Einfach- und doppeltlogarithmische Darstellung von Funktionen

Viele Funktionen lassen sich schlecht in einem Diagramm über den gesamten „interessanten“ Bereich darstellen. Dies betrifft speziell solche Funktionen, die sowohl sehr große als auch sehr kleine Werte annehmen.

Hier bietet sich es die Möglichkeit, eine oder beide Koordinatenachsen logarithmisch darzustellen. Dies bedeutet, dass statt x bzw. $f(x)$ $\log x$ bzw. $\log f(x)$ aufgetragen wird. Dies geht natürlich nur, wenn die Definitionsmenge bzw. die Wertemenge nur aus positiven Zahlen besteht. Als Basis der Logarithmen wird meist 10 verwendet, sodass die Achseneinteilung ...0.01, 0.1, 1, 10, 100... ist.

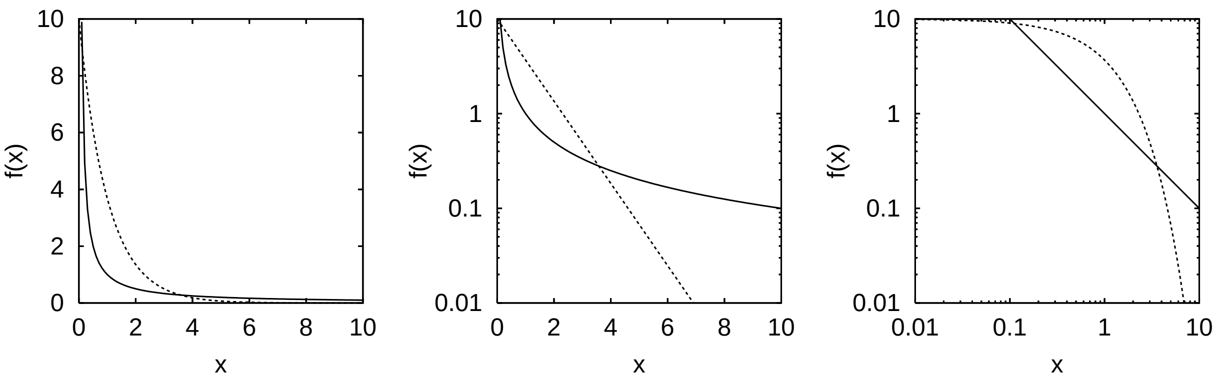

Abbildung 3: $f(x) = \frac{1}{x}$ (durchgezogene Linie) und $f(x) = 10 \exp(-x)$ (gestrichtelte Linie) in linearer, einfachlogarithmischer und doppeltlogarithmischer Darstellung

Eine Darstellung, bei der die x-Achse linear und die y-Achse logarithmisch dargestellt ist, wird als einfachlogarithmische Darstellung bezeichnet, manchmal auch als halblogarithmische Darstellung. Eine Darstellung, bei der beide Achsen logarithmiert sind, wird als doppeltlogarithmisch bezeichnet. Die Kombination aus logarithmischer x-Achse und linearer y-Achse wird selten verwendet. Abbildung 3 zeigt die Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$ und $f(x) = 10 \exp(-x)$ in linearer, einfachlogarithmischer und doppeltlogarithmischer Darstellung.

Bei der Achsenbeschriftung ist es egal, ob wir x bzw. $f(x)$ und Werte wie $\ldots 0.01, 0.1, 1, 10, 100\ldots$ eintragen oder $\log_{10} x$ bzw. $\log_{10} f(x)$ und Werte wie $\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots$

Geraden sind in Diagrammen besonders leicht zu erkennen. Eine Gerade in einem linear skalierten Diagramm hat die Form

$$f(x) = ax + b$$

Die Steigung a und der Achsenabschnitt b sind leicht aus dem Diagramm abzulesen.

Eine Gerade in einem einfachlogarithmischen Diagramm hat hingegen die Form

$$\log_{10} f(x) = ax + b$$

sodass

$$f(x) = 10^{ax+b} = 10^b \, 10^{ax} = 10^b \exp(a \ln 10 \, x) = \beta \exp(\alpha x)$$

mit $\alpha = a \ln 10$ und $\beta = 10^b$. β kann alternativ direkt als $f(0)$ aus dem Diagramm abgelesen werden. Eine Gerade in einem einfachlogarithmischen Diagramm ist also eine Exponentialfunktion.

Eine Gerade in einem doppeltlogarithmischen Diagramm hat schließlich die Form

$$\log_{10} f(x) = a \log_{10} x + b$$

sodass

$$f(x) = 10^{a \log_{10} x + b} = 10^b \exp((a \log_{10} x) \ln 10) = 10^b \exp(a \ln x) = 10^b \, x^a = \beta \, x^a$$

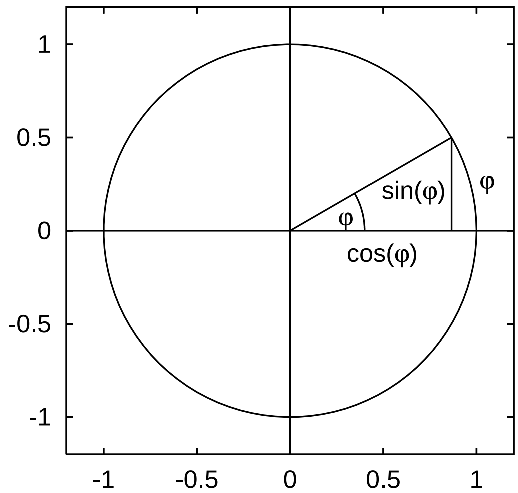

Abbildung 4: Definition von $\cos(\varphi)$ und $\sin(\varphi)$ am Einheitskreis

mit $\beta = 10^b$. Hier kann β direkt als $f(1)$ aus dem Diagramm abgelesen werden. Eine Gerade in einem doppeltlogarithmischen Diagramm ist also eine Potenzfunktion.

Übungsaufgaben

Aufgabe 10

Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1000}$ und $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1000}$ im Bereich von $x = 1$ bis $x = 1000$ in einem doppeltlogarithmischen Diagramm!

1.10 Trigonometrische Funktionen

Die trigonometrischen Funktionen cos und sin lassen sich am einfachsten am Einheitskreis (Kreis vom Radius 1) veranschaulichen (Abb. 4).

In der Analysis werden Winkel grundsätzlich im Bogenmaß gemessen. Bogenmaß ist die Länge des Kreisbogens (der dem Winkel entspricht) am Einheitskreis. Ein Vollkreis, also 360°, entspricht 2π im Bogenmaß.

Häufig werden die Abkürzungen $\sin\varphi = \sin(\varphi)$, $\cos\varphi = \cos(\varphi)$, $\sin^2\varphi = (\sin\varphi)^2$, $\cos^2\varphi = (\cos\varphi)^2$ und $\tan\varphi = \tan(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$ verwendet.

Die wichtigsten Eigenschaften der Sinus- und Cosinusfunktionen sind:

1. $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$
2. $\frac{d}{d\varphi}\sin\varphi = \cos\varphi$ und $\frac{d}{d\varphi}\cos\varphi = -\sin\varphi$. Achtung: Dies gilt wirklich nur im Bogenmaß!
3. $\sin(-\varphi) = -\sin\varphi$ und $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$
4. $\sin(\varphi + \pi) = -\sin\varphi$ und $\cos(\varphi + \pi) = -\cos\varphi$
5. $\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\varphi$ und $\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \sin\varphi$
6. $\cos(\varphi) = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \frac{\varphi^4}{24} - \frac{\varphi^6}{720} + \ldots$ und $\sin(\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^3}{6} + \frac{\varphi^5}{120} - \frac{\varphi^7}{5040} + \ldots$, sodass $\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ und $\sin(\varphi) \approx \varphi$ wenn φ klein ist. Achtung: Auch dies gilt nur im Bogenmaß!
7. $\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\,\cos\psi - \sin\varphi\,\sin\psi$ und $\sin(\varphi + \psi) = \cos\varphi\,\sin\psi + \sin\varphi\,\cos\psi$ (Additionstheoreme)

Übungsaufgaben

Aufgabe 11

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen!

(a) $f(x) = \sin(kx)\cos(kx)$ mit $k = \text{const.}$

(b) $f(x) = \cos x\,\exp(-x)$

(c) $f(\phi) = \mathrm{sind}(\phi)$ (sind steht hier für die Sinusfunktion, bei der ϕ in Grad gemessen wird)

Aufgabe 12

Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

(a) $f(x) = \arcsin(x)$ (Umkehrung der Sinusfunktion)

(b) $f(x) = \arctan(x)$ (Umkehrung der Tangensfunktion)

mit Hilfe der Regel für die Ableitung der Umkehrfunktion und der in der Lehrveranstaltung behandelten Rechenregeln für die trigonometrischen Funktionen!

1.11 Integration

Das **bestimmte Integral** $\int_a^b f(x)\,dx$ ist die Fläche, die der Graph von $f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ mit der x-Achse einschließt. Flächen unterhalb der x-Achse (d. h. solche, wo $f(x) < 0$ ist) werden negativ gerechnet.

$\int_a^b f(x)\,dx$ kann näherungsweise grafisch bestimmt werden, indem die Fläche durch irgendwelche Formen bekannten Flächeninhalts (z. B. Rechtecke oder Dreiecke) angenähert wird. Hierbei ist die Einteilung der Koordinatenachsen zu beachten. Die grafische Bestimmung funktioniert nur, wenn beide Achsen linear skaliert sind.

Rechnerisch werden Intgrale mit Hife der Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung bestimmt. Diesen erhält man wie folgt: Wir betrachten die Funktion

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

mit fester unterer Integrationsgrenze a. Für diese gilt:

$$F'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{F(b+h) - F(b)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{b+h} f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_b^{b+h} f(x)\,dx}{h}$$

Wenn h klein ist, lässt sich das Integral durch ein Rechteck annähern:

$$\int_b^{b+h} f(x)\,dx \approx h\,f(b)$$

sodass

$$F'(b) = \lim_{h\to 0} \frac{h\,f(b)}{h} = f(b)$$

d. h.

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(x)\,dx = f(b)$$

Dies ist der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**. Er besagt, dass die Ableitung des bestimmten Integrals nach der oberen Integrationsgrenze (bei fester unterer Integrationsgrenze) gleich dem Integranden (der Funktion im Integral) an der oberen Integrationsgrenze ist.

Was bringt dies für die Berechnung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$? Zunächst sucht man eine Funktion F mit der Eigenschaft $F'(x) = f(x)$. Eine solche Funktion wird als **Stammfunktion** zur Funktion f bezeichnet.

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt dann

$$\frac{d}{db} \int_a^b f(x)\,dx = \frac{d}{db} F(b)$$

sodass

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) + C$$

Die Konstante C lässt sich leicht bestimmen, indem man $b = a$ setzt und $C = -f(a)$ erhält. Damit ergibt sich

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Das bestimmte Integral ist also die Differenz der Werte einer (beliebigen) Stammfunktion zu f an den Integrationsgrenzen. Für die Differenz $F(b) - F(a)$ wird häufig die Abkürzung $F(x)|_{x=a}^{b}$ oder $F(x)|_a^b$ verwendet. Für die Stammfunktion F verwendet man häufig das **unbestimmte Integral** $\int f(x)\,dx$ als Symbol. Bei der Schreibweise als bestimmtes bzw. unbestimmtes Integral ist folgender Unterschied zu beachten: $\int_a^b f(x)\,dx$ ist eine Funktion der Integrationsgrenzen a und b, während die Integrationsvariable x keine Bedeutung hat. Sie könnte irgendwie heißen, d. h.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$$

Hingegen ist das unbestimmte Integral (d. h. die Stammfunktion) $\int f(x)\,dx$ eine Funktion der Variablen x, d. h. $\int f(x)\,dx$ und $\int f(u)\,du$ bezeichnen im Prinzip dieselbe Funktion (genau wie z. B. $f(x) = x^2$ und $f(u) = u^2$), aber wir dürfen nicht schreiben

$$\int f(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

Ebenfalls vermeiden sollte man die Schreibweise in der Art $\int_0^x f(x)\,dx$, da hier x in doppelter Bedeutung (Integrationsvariable und obere Integrationsgrenze) auftritt.

1.12 Integrationsregeln

Die Bestimmung einer Stammfunktion ist die „Umkehrung“ des Ableitens. Praktisch ist dies allerdings wesentlich schwieriger als das Ableiten. Für letzteres gibt es Summen-, Produkt- und Kettenregel, welche immer zum Ziel führen. Nur die Summenregel und Regel für die Multiplikation einer Funktion mit einer Konstanten lassen sich direkt in allgemein anwendbare Integrationsregeln umsetzen, nämlich

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

und

$$\int (c\,f(x))\,dx = c\int f(x)\,dx$$

Auch aus der Kettenregel lässt sich im Prinzip eine Integrationsregel ableiten. Aus

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

folgt die **Substitutionsregel**:

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))$$

wenn F eine Stammfunktion zu f ist. Dies können wir auch schreiben als

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du|_{u=g(x)}$$

oder für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Zum Einprägen der Substitutionsregel bietet sich folgende Regel an: $g(x)$ wird durch eine neue Variable u substituiert. Dann ist

$$g'(x)\,dx = \frac{du}{dx}\,dx = du$$

Ein einfaches Beispiel für die Anwendung der Substitutionsregel ist die Suche nach einer Stammfunktion zu $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$. Mit $g(x) = x^2 + 1$ und $f(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx &= \int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du|_{u=g(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du|_{u=x^2+1} = 2\sqrt{u}|_{u=x^2+1} \\
&= 2\sqrt{x^2+1}
\end{aligned}$$

Das Problem der Substitutionsregel ist allerdings, dass nur selten eine naheliegende Darstellung des Integranden als Verkettung von Funktionen existiert.

Aus der Produktregel lässt sich die Regel der partiellen Integration ableiten. Aus

$$\frac{d}{dx}(f(x)\,g(x)) = f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x)$$

folgt direkt

$$\int (f(x)\,g'(x) + f'(x)\,g(x))\,dx = f(x)\,g(x)$$

und daraus die Regel der **partiellen Integration**

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx$$

Wie die Substitutionsregel führt auch diese Integrationsregel nur selten zum Ziel, sodass Integration meist auf Raten, dem Wissen vieler Ableitungen oder der Verwendung einer guten Formelsammlung beruht.

Übungsaufgaben

Aufgabe 13

Berechnen Sie für die Funktion

$$f(x) = \exp(-x) - \exp(-2x)$$

das bestimmte Integral $\int_0^b f(x)\,dx$! Was ergibt sich am Grenzfall $b \to \infty$?

1.13 Lösen einfacher Differentialgleichungen mit Hilfe der Substitutionsregel

Differentialgleichungen der Form

$$f'(t) = G(f(t))$$

mit der Anfangsbedingung $f(0) = f_0$ lassen sich prinzipiell mit Hilfe der Substitionsregel lösen. Hierfür schreiben wir die Gleichung um in

$$\frac{f'(t)}{G(f(t))} = 1$$

und integrieren diese von 0 bis t:

$$\int_0^t \frac{f'(\tau)}{G(f(\tau))}\,d\tau = t$$

Hieraus folgt mit Hilfe der Substitutionsregel:

$$\int_{f_0}^{f(t)} \frac{1}{G(u)}\,du = t$$

Falls sich das Integral berechnen lässt, und sich die resultierende Gleichung nach $f(t)$ auflösen lässt, haben wir die Lösung der Anfangswertaufgabe gefunden. Diese Lösungsmethode ist ein Spezialfall der Separation der Variablen, bei der statt 1 auf der rechten Seite eine beliebige Funktion $g(t)$ stehen kann.

Für das in Aufgabe 5 behandelte logistische Wachstumsmodell

$$\frac{d}{dt}f(t) = \lambda f(t) - \mu f(t)^2$$

folgt damit:

$$\int_{f_0}^{f(t)} \frac{1}{\lambda u - \mu u^2}\,du = t$$

Um dieses Integral zu lösen, benötigt man allerdings Methoden wie die Partialbruchzerlegung oder eine Formelsammlung.

Übungsaufgaben

Aufgabe 14

Wir betrachten die einfache chemische Reaktion zweier Atome vom Typ A zu einem Molekül A_2 ohne Rückreaktion: $2A \rightarrow A_2$. Die Konzentration $c(t)$ der Atome vom Typ A folgt dann der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt}c(t) = -k\,c(t)^2.$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $c(0) = 1$! Ist der Abfall der Konzentration schneller oder langsamer als beim radioaktiven Zerfall?

Aufgabe 15

In dieser Aufgabe berechnen wir nochmal den Luftdruck p in der Atmosphäre als Funktion der Höhe über Normalnull z. Im Gegensatz zu Aufgabe 6 gehen wir nun aber nicht davon aus, dass die Temperatur von z unabhängig ist. Stattdessen nehmen wir eine sogenannte adiabatische Zustandsänderung an, was bedeutet, dass Luft auf- und abströmen kann, ohne dass sich die innere Energie ändert. Hierbei ist die Dichte ρ nicht proportional zum Druck p, sondern zu $p^{\frac{5}{7}}$, d. h.

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{5}{7}}.$$

Der Druck an der Erdoberfläche ergibt sich wiederum aus dem Gasgesetz

$$\rho_0 = \frac{M}{R}\frac{p_0}{T_0}.$$

Damit lautet die hydrostatische Gleichung:

$$\frac{d}{dz}p(z) = -\rho(z)\,g = -\frac{M}{R}\frac{p_0}{T_0}\left(\frac{p(z)}{p_0}\right)^{\frac{5}{7}} g = -\lambda\,p_0^{\frac{2}{7}}\,p(z)^{\frac{5}{7}}$$

mit $\lambda = \frac{Mg}{RT_0} = \frac{1}{8.38\,\text{km}}$.

(a) Lösen Sie diese Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $p(0) = p_0 = 1013\,\text{mbar}$, und zeichnen Sie die Lösung gemeinsam mit der aus Aufgabe 6 in ein ein einfachlogarithmisches Diagramm!

(b) Berechnen Sie aus der in (a) gefundenen Lösung mit Hilfe der Gasgleichung die Temperatur T als Funktion der Höhe z und entscheiden Sie, ob dieses Modell realistisch ist!

2 Analysis mehrerer Veränderlicher

2.1 Funktionen von zwei Veränderlichen

In vielen Anwendungen treten Funktionen mehrerer Variablen auf. So wird beispielsweise das Relief meist beschrieben als eine Funktion $H(x_1, x_2)$ (oder $H(x, y)$), wobei x_1 und x_2 die horizontalen Koordinaten sind, oder als $H(\lambda, \phi)$ als Funktion von Längen- und Breitengrad. Die vorkommenden Variablen können auch unterschiedliche physikalische Bedeutungen haben, so stellt beispielsweise das Gesetz eines idealen Gases

$$\rho(p, T) = \frac{M}{R}\frac{p}{T},$$

die Dichte ρ als Funktion des Druckes p und der Temperatur T dar.

Die grafische Darstellung einer solchen Funktion erfolgt oft als Fläche im Raum („fliegender Teppich“, wie man sich das Relief vorstellt). Alternativ kann man in einem ebenen Diagramm die Funktionswerte farbig codieren, oder die Funktion mit **Isolinien** darstellen. Isolinien sind Bereiche in der Definitionsmenge, auf denen die Funktionswerte konstant sind. Im Beispiel der Reliefhöhe sind die Isolinien die in jeder topographischen Karte vorhandenen Höhenlinien.

2.2 Partielle Ableitungen

Das Differenzieren einer Funktion mehrerer Variablen ist nicht komplizierter als bei Funktionen einer Variablen. Man stellt sich vor, alle Variablen bis auf eine seien konstant und leitet dann die Funktion wie gewohnt ab. Dies wird als **partielle Ableitung** bezeichnet. Bei einer Funktion zweier Variablen ist die partielle Ableitung nach x_1: $\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2)$ die, bei der die Funktion in Abhängigkeit von x_1 betrachtet, und x_2 als konstant angenommen wird. Analog wird bei $\frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2)$ die Funktion in Abhängigkeit von x_2 betrachtet, und x_1 als konstant angenommen. Als Symbol für partielle Ableitungen wird grundsätzlich $\frac{\partial}{\partial x_i}$ verwendet.

Für das Beispiel des idealen Gases gilt:

$$\frac{\partial}{\partial p}\rho(p, T) = \frac{M}{R}\frac{1}{T}, \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial T}\rho(p, T) = -\frac{M}{R}\frac{p}{T^2},$$

Für partielle Ableitungen gelten alle Ableitungsregeln, die wir im ersten Kapitel für Funktionen einer Variablen kennengelernt haben:

- Summenregel
- Produktregel

- Kettenregel
- Quotientenregel
- ...

An einem Maximum oder Minimum einer differenzierbaren Funktion zweier Variablen muss gelten:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) = 0$$

Relativ häufig kommt der Fall vor, dass für beide Variablen einer Funktion zweier Variablen Funktionen einer dritten Variablen eingesetzt werden. Im Beispiel des Reliefs könnte dies dem entsprechen, dass wir mit der Zeit auf der Landkarte entlangwandern und wissen wollen, wie sich dabei die Höhe mit der Zeit ändert. Bei einem Gas könnte es sein, dass sich Druck und Temperatur mit der Zeit ändern, und wir wissen wollen, wie sich die Dichte mit der Zeit ändert. Hierfür gilt die Kettenregel in der Form

$$\frac{d}{dt} H(x_1(t), x_2(t)) = \frac{\partial}{\partial x_1} H(x_1(t), x_2(t)) \frac{d}{dt} x_1(t) + \frac{\partial}{\partial x_2} H(x_1(t), x_2(t)) \frac{d}{dt} x_2(t)$$

bzw.

$$\frac{d}{dt} \rho(p(t), T(t)) = \frac{\partial}{\partial p} \rho(p(t), T(t)) \frac{d}{dt} p(t) + \frac{\partial}{\partial T} \rho(p(t), T(t)) \frac{d}{dt} T(t)$$

2.3 Der Gradient

Die beiden Variablen x_1 und x_2 einer Funktion $f(x_1, x_2)$ lassen sich formal zu einem Vektor

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

des $\mathbb{R}^2$ (d. h. in der Ebene) zusammenfassen.

Genaueres über Vektoren lernen wir im nächsten Kapitel. Für den Moment genügt es zu wissen, dass man Vektoren komponentenweise addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren (strecken) kann:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}.$$

Die partiellen Ableitungen nach den beiden Variablen lassen sich ebenfalls zu einem Vektor des $\mathbb{R}^2$ zusammen, welcher als **Gradient** bezeichnet und mit dem Symbol $\text{grad} f(\underline{x})$ oder $\nabla f(\underline{x})$ abgekürzt wird:

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f(x_1, x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2} f(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

Die bekannten Ableitungsregeln lassen sich auch für den Gradienten aufschreiben:

$$\begin{aligned}\nabla\left(f(\underline{x})+g(\underline{x})\right) &= \nabla f(\underline{x})+\nabla g(\underline{x})\\ \nabla\left(f(\underline{x})\,g(\underline{x})\right) &= f(\underline{x})\,\nabla g(\underline{x})+g(\underline{x})\,\nabla f(\underline{x})\\ \nabla f(g(\underline{x})) &= f'(g(\underline{x}))\,\nabla g(\underline{x})\end{aligned}$$

Bei der Kettenregel ist zu beachten, dass die innere Funktion g in dieser Form nicht vektorwertig sein darf, sodass f eine Funktion einer Variablen ist.

Die Kettenregel für den im letzten Abschnitt betrachteten Fall, nämlich eine Funktion $f(\underline{x}(t))$ lautet:

$$\frac{d}{dt}f(\underline{x}(t))=\frac{\partial}{\partial x_1}f(\underline{x}(t))\frac{d}{dt}x_1(t)+\frac{\partial}{\partial x_2}f(\underline{x}(t))\frac{d}{dt}x_2(t)=\nabla f(\underline{x}(t)\cdot\frac{d}{dt}\underline{x}(t)$$

Hierbei bezeichnet

$$\underline{a}\cdot\underline{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}=a_1\,b_1+a_2\,b_2$$

das Skalarprodukt zweier Vektoren.

Als Beispiel für diese Form der Kettenregel betrachten wir eine Bewegung entlang der Erdoberfläche, welche in Landkartenansicht (also in der Ebene) durch eine Funktion $\underline{x}(\mathrm{t})$ beschrieben wird. Ist $H(\underline{x})$ die Reliefhöhe an der Stelle $\underline{x}$, so ist $H(\underline{x}(t)$ die Höhe, in der wir uns zur Zeit t befinden. Nach der Kettenregel ist unsere Aufstiegsrate (Höhengewinn pro Zeit)

$$\frac{d}{dt}H(\underline{x}(t))=\nabla H(\underline{x}(t)\cdot\frac{d}{dt}\underline{x}(t),$$

also das Skalarprodukt aus dem Gradienten der Reliefhöhe und unserer horizontalen Geschwindigkeit.

An jedem Maximum oder Minumum einer differenzierbaren Funktion muss selbstverständlich $\nabla f(\underline{x})=0$ gelten. Umgekehrt sind alle Stellen mit $\nabla f(\underline{x})=0$ lokale (!) Maxima, Minima oder Sattelpunkte. Im Gegensatz zu Funktionen einer Variablen kommen Sattelpunkte allerdings relativ häufig vor, sie haben meist geometrisch tatsächlich die Form eines Sattels.

Übungsaufgaben

Aufgabe 16

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen und den Gradienten der folgenden Funktionen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$!

(a) $f(\underline{x})=x_1^3+3\,x_1^2\,x_2+3\,x_1\,x_2^2+x_2^3$

(b) $f(\underline{x}) = \underline{a} \cdot \underline{x}$ mit $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ (konstant), $\underline{a} \cdot \underline{x} = a_1 x_1 + a_2 x_2$ (Skalarprodukt)

(c) $f(\underline{x}) = \sin(\underline{a} \cdot \underline{x})$ mit $\underline{a} \in \mathbb{R}^2$ (konstant)

(d) $f(\underline{x}) = |x|^2$ mit $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ (Länge des Vektors $\underline{x}$)

(e) $f(\underline{x}) = |x|$

Aufgabe 17

Skizzieren Sie zu den folgenden Funktionen die Isolinien, berechnen Sie den Gradienten, finden Sie die Stellen, wo der Gradient null wird, und finden Sie heraus, ob es sich dabei um Minima, Maxima oder Sattelpunkte handelt!

(a) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

(b) $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$

(c) $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$

(d) $f(x_1, x_2) = x_1 \, x_2$

(e) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 3 \, x_1 \, x_2$

(f) $f(x_1, x_2) = \sin x_1 \, \sin x_2$

2.4 Geometrische Bedeutung des Gradienten

Die geometrische Bedeutung des Gradienten lässt sich mit dem Beispiel der Aufstiegsrate aus dem letzten Abschnitt veranschaulichen. Nehmen wir zunächst an, dass wir uns entlang einer Höhenlinie (oder im allgemeinen Fall einer Isolinie) bewegen. In diesem Fall muss $\frac{d}{dt} H(\underline{x}(t)) = 0$ sein, also auch

$$\nabla H(\underline{x}(t)) \cdot \frac{d}{dt} \underline{x}(t) = 0.$$

Im nächsten Kapitel werden wir lernen, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren genau dann null ist, wenn sie senkrecht zueinander sind. Hieraus folgt sofort, dass der Gradient immer senkrecht auf den Isolinien steht.

Ebenso werden wir lernen, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren maximal ist, wenn sie in dieselbe Richtung zeigen. Demnach ist bei gegebener Geschwindigkeit die Aufstiegsrate maximal, wenn wir in Richtung des Gradienten wandern. In anderen Worten: Der Gradient zeigt immer in die Richtung des steilsten Anstiegs der Funktion.

In diesem Fall ist die Aufstiegsrate

$$\frac{d}{dt}H(\underline{x}(t)) = \nabla H(\underline{x}(t) \cdot \frac{d}{dt}\underline{x}(t) = |\nabla H(\underline{x}(t)|\,|\frac{d}{dt}\underline{x}(t)|$$

wobei die Betragstriche die Länge der Vektoren bezeichnen:

$$|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

Demnach ist die Länge des Gradientenvektors die Steigung der Funktion in Richtung der steilsten Anstiegs. In einem Isoliniendiagramm lässt sich diese näherungsweise aus dem Abstand der Isolinien bestimmen.

Übungsaufgaben

Aufgabe 18

Abbildung 5 zeigt die Höhenlinien einer Region.

(a) Machen Sie sich eine geometrische Vorstellung des Reliefs! Wo sind Gipfel, Bergrücken und Täler?

(b) Suchen Sie alle Stellen, an denen der Gradient der Reliefhöhe null ist. Wieviele solche Stellen finden Sie insgesamt? Wieviele davon sind Gipfeln, Senken bzw. Sättel!

(c) Suchen Sie die steilste Stelle des Reliefs, und bestimmen Sie den Gradienten an dieser Stelle!

3 Lineare Algebra

3.1 Vektoren und Vektorräume

Es gibt verschiedene Vorstellungen von Vektoren, z. B. Pfeile oder Tupel von Zahlen der Form

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Vektoren der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ haben wir bereits kurz im letzten Kapitel kennengelernt.

Ebenfalls gibt es verschiedene Schreibweisen, z. B. mit Vektorpfeil oder Unterschreichung. In der Mathematik werden Vektoren normalerweise überhaupt nicht explizit gekennzeichnet, da immer aus dem

Zusammenhang klar ist, ob es um Zahlen oder Vektoren geht. Wir verwenden hier die Schreibweise mit Unterstreichung.

Allen Vorstellungen von Vektoren ist gemeinsam, dass Vektoren Objekte sind, die sich sinnvoll addieren und strecken (bzw. stauchen) lassen.

Für die Addition von Vektoren gelten dieselben Regeln wie für die Addition von reellen Zahlen:

A1 Zu jedem Paar von Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ gibt es einen Vektor $\underline{a} + \underline{b}$.

A2 $\underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$ für alle Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

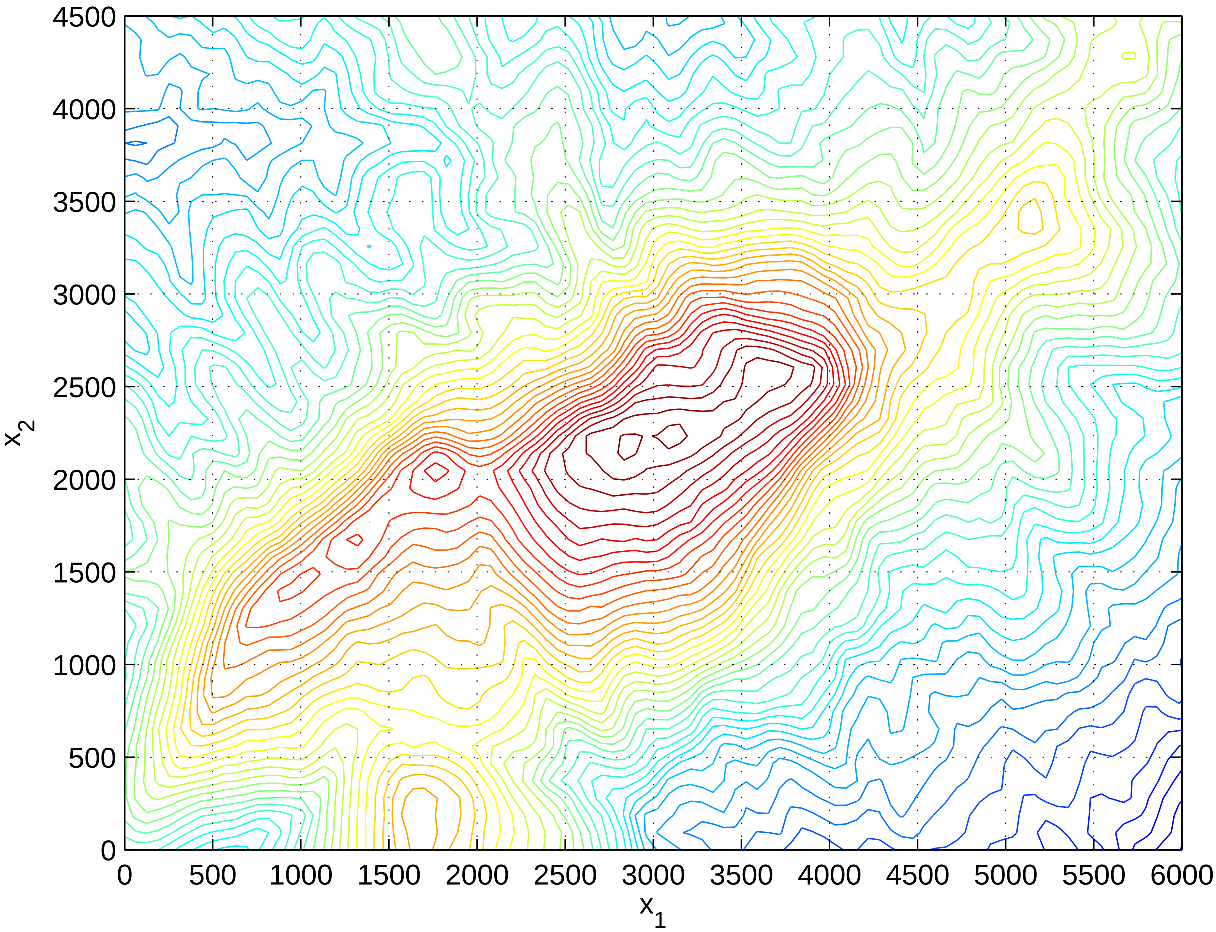

Abbildung 5: Höhenlinien einer Region. Die Einheiten auf der x_1- und x_2-Achse sind Meter. Braune Höhenlinien gehören zu großen Höhen, blaue zu geringen Höhen. Der Abstand der Höhenlinien ist 20 Meter, die höchste Höhenlinie gehört zu 1440 Meter.

A3 $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$ für alle Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$.

A4 Es gibt einen Nullvektor $\underline{0}$, sodass $\underline{a}+\underline{0}=\underline{a}$ für alle Vektoren $\underline{a}$.

A5 Zu jedem Vektor $\underline{a}$ gibt es einen inversen (umgekehrten) Vektor $-\underline{a}$, sodass $\underline{a}+(-\underline{a})=\underline{0}$.

In Analogie zur Subtraktion von Zahlen verwendet man die Kurzschreibweise $\underline{a}-\underline{b}$ für $\underline{a}+(-\underline{b})$.

Die Streckung (bzw. Stauchung) stellen wir als Multiplikation von reellen Zahlen mit Vektoren dar. Für diese gelten zumindest einige der Regeln, die wir von der Multiplikation reeller Zahlen untereinander kennen:

S1 Zu jeder reellen Zahl λ und zu jedem Vektor $\underline{a}$ gibt es einen Vektor $\lambda\underline{a}$.

S2 $1\underline{a}=\underline{a}$ für alle Vektoren $\underline{a}$.

S3 $\lambda(\mu\underline{a})=(\lambda\mu)\underline{a}$ für alle Zahlen λ und μ und alle Vektoren $\underline{a}$.

Darüber hinaus „vertragen“ sich Vektoraddition und Streckung miteinander:

AS1 $(\lambda+\mu)\underline{a}=\lambda\underline{a}+\mu\underline{a}$ für alle Zahlen λ und μ und alle Vektoren $\underline{a}$.

AS2 $\lambda(\underline{a}+\underline{b})=\lambda\underline{a}+\lambda\underline{b}$ für alle Zahlen λ und alle Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.

Diese Regeln entsprechen ebenfalls denen, die wir von Addition und Multiplikation reeller Zahlen untereinander kennen.

Eine Menge aus Objekten, welche sich nach den Regeln A1–A5, S1–S3 und AS1–AS2 addieren und strecken lassen, wird als **Vektorraum** bezeichnet. Die Elemente eines Vektorraumes heißen **Vektoren**.

Die Eigenschaften A1–A5, S1–S3 und AS1–AS2, welche zur Definition eines Vektorraumes verwendet werden, stellen einen minimalen Satz von Eigenschaften dar. Alle weiteren bekannten Rechenregeln für Vektoren, z. B.

$$0\underline{a}=\underline{0} \quad \text{und} \quad (-1)\underline{a}=-\underline{a}$$

lassen sich aus diesen ableiten.

Im Folgenden besprechen wir vier Beispiele von Vektorräumen im Sinne der obigen Definition:

Die reellen Zahlen selbst bilden einen Vektorraum. Abgesehen von dem (trivialen) Vektorraum, der nur aus einem Nullvektor besteht, ist dies der einfachste Vektorraum.

Pfeile in der Ebene bilden einen Vektorraum, wenn wir die übliche Addition und Streckung verwenden:

- Zwei Pfeile werden addiert, indem der Anfang des zweiten an die Spitze des ersten gesetzt wird. Das Ergebnis ist ein Pfeil vom Anfang des ersten zur Spitze der zweiten Pfeils.
- Ein Pfeil wird um einen positiven Faktor λ gestreckt, indem seine Länge auf das λ-fache erhöht wird, während die Richtung beibehalten wird. Bei einer Streckung um einen negativen Faktor λ wird die Länge um den Faktor $|\lambda|$ erhöht, und die Richtung umgekehrt.

Tupel aus n reellen Zahlen bilden einen Vektorraum, wenn wir die Addition und Streckung komponentenweise definieren:

- Zwei Tupel werden addiert, indem die einzelnen Komponenten addiert werden.
- Ein Tupel wird um einen Faktor λ gestreckt, indem die einzelnen Komponenten mit λ multipliziert werden.

Dieser Vektorraum heißt $\mathbb{R}^n$ und wird speziell für $n = 2$ und $n = 3$ zur Beschreibung von Punkten in der Ebene bzw. im Raum verwendet.

Funktionen können ebenfalls (wenn auch nicht sehr anschauliche) Vektorräume bilden. Nehmen wir z. B. die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, d. h. die Funktionen, deren Definitionsmenge die gesamten reellen Zahlen umfasst, und deren Wertemenge $\mathbb{R}$ oder eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Mit den naheliegenden Definitionen

- Addition: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
- Streckung: $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

bildet die Menge dieser Funktionen einen Vektorraum.

Es gibt also Vektoren, die auf dem ersten Blick nicht viel mit der Vorstellung von Vektoren aus der Schule gemeinsam haben. Die meisten Eigenschaften von Vektoren, die wir demnächst kennenlernen werden, gelten für Vektoren im allgemeinen Sinn (nach obiger Definition eines Vektorraumes) und sind nicht auf die Vorstellung von Vektoren aus der Schulmathematik beschränkt. Daher ist es durchaus von Vorteil, sich mit der allgemeinen Definition von Vektoren zu beschäftigen. Veranschaulichen kann man sich die meisten Ergebnisse allerdings gut am Beispiel von Pfeilen in der Ebene bzw. $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$.

Etwas gewöhnungsbedürftig mag es zunächst sein, dass Vektoren nicht unbedingt eine Länge haben, nicht wissen, was es heißt, senkrecht aufeinander zu stehen, und dass man Vektoren i. A. nicht miteinander multiplizieren kann.

Übungsaufgaben

Aufgabe 19

Wir betrachten „Vektoren“ (in Anführungszeichen, weil wir nicht wissen, ob es wirklich welche sind), welche so aussehen wie Vektoren des $\mathbb{R}^2$. Die Streckung dieser „Vektoren“ geht wie in $\mathbb{R}^2$.

(a) Die Addition dieser „Vektoren“ ist anders als in $\mathbb{R}^2$, nämlich

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 + b_2 \\ a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

Handelt es sich wirklich um Vektoren, d. h. bilden Sie einen Vektorraum?

(b) Handelt es sich um Vektoren, wenn die Addition nach der Regel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max\{a_1, b_1\} \\ \max\{a_2, b_2\} \end{pmatrix}$$

erfolgt?

3.2 Längen und Abstände

Für Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ haben wir schon aus dem zweiten Kapitel eine Vorstellung, was ihre Länge ist. Diese lässt sich leicht auf die Länge eines Vektors $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern:

$$||\underline{a}|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$$

Auf allgemeine Vektoren lässt sich dies jedoch nicht übertragen.

Allgemein wird eine **Norm** oder **Länge** definiert als eine Abbildung von einem Vektorraum in die reellen Zahlen mit den Eigenschaften

N1 Für alle Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ gilt die **Dreiecksungleichung**: $||\underline{a} + \underline{b}|| \leq ||\underline{a}|| + ||\underline{b}||$.

N2 Für alle Vektoren $\underline{a}$ und alle reellen Zahlen λ gilt: $||\lambda\underline{a}|| = |\lambda|\,||\underline{a}||$.

N3 Nur der Nullvektor hat die Länge null, d. h. $||\underline{a}|| = 0$ gilt nur, wenn $\underline{a} = \underline{0}$.

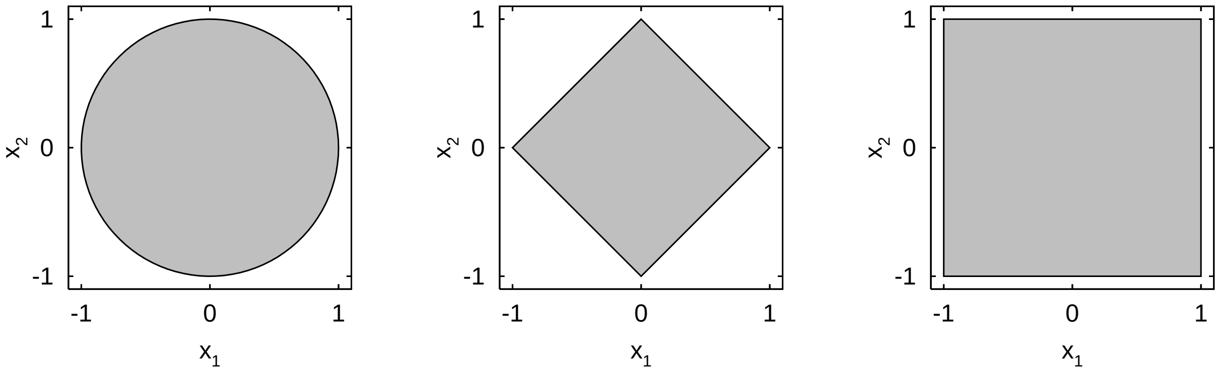

Abbildung 6: Die Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ (Einheitskreis) mit euklidischer Norm (links), Manhattan-Norm (Mitte) und Maximumsnorm (rechts)

Aus den Eigenschaften N1 und N2 folgt die wichtige Eigenschaft, dass die Länge eines Vektors niemals negativ ist.

Als **Abstand** zweier Punkte $\underline{a}$ und $\underline{b}$ bezeichnet man die Länge der Differenz $\underline{a} - \underline{b}$, d. h. $||\underline{a} - \underline{b}||$.

Nicht jeder Vektorraum besitzt eine Norm. Ein Vektorraum, der eine Norm besitzt, heißt **normierter** Vektorraum. $\mathbb{R}^n$ ist demnach ein normierter Vektorraum, allerdings gibt es außer der oben erwähnten **euklidischen Norm** noch beliebig viele weitere Normen in $\mathbb{R}^n$, z. B.

- Die **Manhattan-Norm** $||\underline{a}|| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$. Deren Name geht darauf zurück, dass sie in $\mathbb{R}^2$ die Länge des Weges beschreibt, den man in einer Stadt mit rechtwinklig angeordneten Straßen zurücklegt.
- Die **Maximumsnorm** $||\underline{a}|| = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|\}$,

Bei der Euklidischen Norm wird statt $||\underline{a}||$ häufig die Schreibweise $|\underline{a}|$ verwendet.

Ein Vektor der Länge 1 heißt **Einheitsvektor** oder **normierter** Vektor. Aus jedem Vektor $\underline{a} \neq \underline{0}$ eines normierten Vektorraums lässt sich durch geeignete Streckung ein Einheitsvektor machen: $\underline{e} = \frac{1}{||\underline{a}||}\underline{a}$. Man bezeichnet diesen Vorgang als **Normierung** der Vektors $\underline{a}$.

Die Menge aller Punkte $\underline{x}$, deren Abstand von einem gegebenen Punkt $\underline{a}$ kleiner oder gleich einer gegebenen Zahl r ist, d. h.

$$||\underline{x} - \underline{a}|| \quad \leq \quad r$$

wird als **Kugel** mit Mittelpunkt $\underline{a}$ und Radius r bezeichnet. Die **Einheitskugel** ist die Kugel mit Mittelpunkt $\underline{0}$ und Radius 1. Diese sieht in verschiedenen Normen völlig unterschiedlich aus (Abb. 6).

Übungsaufgaben

Aufgabe 20

Normieren Sie die Vektoren

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

jeweils in Euklidischer Norm, Manhattan-Norm und Maximumsnorm!

Aufgabe 21

Normieren Sie die Vektoren

(a) $\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$

für $r > 0$ in Euklidischer Norm!

Aufgabe 22

Newton's Gravitationsgesetz lautet: Eine Masse M am Ort $\underline{a}$ zieht eine Masse m, welche sich am Ort $\underline{b}$ befindet, mit der Kraft

$$F = \frac{G\,M\,m}{d^2}$$

an. Hierbei ist G die Gravitationskonstante und d der Abstand der Punkte $\underline{a}$ und $\underline{b}$. Schreiben Sie Newton's Gravitationsgesetz in Vektorform $\underline{F} = \ldots$ auf!

3.3 Polar- und Kugelkoordinaten

In $\mathbb{R}^2$ (mit Euklidischer Norm) lässt sich jeder Einheitsvektor durch einen Winkel darstellen: $\underline{e} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$. Hieraus folgt sofort, dass sich jeder Vektor der $\mathbb{R}^2$ als

$$\underline{a} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r = |\underline{a}| \geq 0 \quad \text{und} \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

darstellen lässt. Diese Darstellung wird als **ebene Polarkoordinaten** bezeichnet.

In $\mathbb{R}^3$ werden zwei Winkel benötigt, wobei die Definition der Winkel in Mathematik und Geowissenschaften meist unterschiedlich ist:

$$\underline{e} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{array}{llll} \vartheta & \in [0, \pi] & = & \text{Polarwinkel} \\ \varphi & \in [0, 2\pi[& = & \text{Azimuthwinkel} \\ \phi & \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & = & \text{Breitengrad} \\ \lambda & \in]-\pi, \pi] & = & \text{Längengrad} \end{array}$$

sodass sich jeder Vektor $\underline{a}$ als

$$\underline{a} = r \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

darstellen lässt. Dies bezeichnet man als **Kugelkoordinaten**.

3.4 Skalarprodukte

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ ist bereits aus dem zweiten Kapitel bekannt:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \quad = \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 .$$

Dies lässt sich leicht auf Vektoren $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix}$ und $\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^n$ verallgemeinern:

$$\underline{a} \cdot \underline{b} \quad = \quad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Die Bezeichnung Skalarprodukt kommt daher, dass es eine Zahl ist.

Wie schon bei der Länge von Vektoren, gibt es auch bei Skalarprodukten verschiedene Definitionen. Ebenfalls analog zur Länge von Vektoren wird das Skalarprodukt über seine Eigenschaften definiert. Ein **Skalarprodukt** ist eine Abbildung, die jedem Paar $\underline{a}$ und $\underline{b}$ von Vektoren eines Vektorraums eine Zahl $\underline{a} \cdot \underline{b}$ zuordnet und die folgenden Eigenschaften hat:

SP1 Für alle Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ist $\underline{a} \cdot \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{a}$.

SP2 Für alle Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ und $\underline{c}$ gilt:

$$(\underline{a} + \underline{b}) \cdot \underline{c} \quad = \quad \underline{a} \cdot \underline{c} + \underline{b} \cdot \underline{c}$$

SP3 Für alle Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ und alle reellen Zahlen λ gilt:

$$(\lambda \underline{a}) \cdot \underline{b} \quad = \quad \lambda(\underline{a} \cdot \underline{b})$$

SP4 Für alle Vektoren $\underline{a} \neq \underline{0}$ ist $\underline{a} \cdot \underline{a} > 0$.

Im Gegensatz zur Streckung von Vektoren werden Skalarprodukte mit einem (dicken) Punkt geschrieben.

Nicht jeder Vektorraum besitzt ein Skalarprodukt. Ein Vektorraum, welcher ein Skalarprodukt besitzt, wird als **euklidischer** Vektorraum bezeichnet. Zur Unterscheidung von anderen Skalarprodukten wird das oben erwähnte Skalarprodukt in $\mathbb{R}^n$ als **Standard-Skalarprodukt** bezeichnet.

Zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ werden als **orthogonal** oder **senkrecht** (zu einander) bezeichnet, wenn $\underline{a} \cdot \underline{b} = 0$ ist. Mehrere Vektoren heißen orthogonal, wenn jedes Paar von ihnen orthogonal ist.

Der Nullvektor steht auf allen Vektoren des jeweiligen Vektorraums senkrecht (folgt direkt aus SP3), und er ist auch der einzige Vektor, der diese Eigenschaft hat (folgt direkt aus SP4).

Mittels der Definition

$$||\underline{a}|| = \sqrt{\underline{a} \cdot \underline{a}}$$

lässt sich aus jedem Skalarprodukt eine Norm bilden. Im Fall des Standard-Skalarprodukts in $\mathbb{R}^n$ ist dies die Euklidische Norm. Manhattan-Norm und Maximumsnorm lassen sich hingegen nicht auf ein Skalarprodukt zurückführen.

Für die aus einem Skalarprodukt gebildete Norm gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|\underline{a} \cdot \underline{b}| \quad \leq \quad ||\underline{a}||\,||\underline{b}||$$

Somit liegt der Quotient $\frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{||\underline{a}||\,||\underline{b}||}$ für alle Vektoren $\underline{a} \neq \underline{0}$ und $\underline{b} \neq \underline{0}$ immer im Bereich von -1 bis 1. Hieraus definiert man den **Winkel** α zwischen den Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ gemäß

$$\cos\alpha \quad = \quad \frac{\underline{a} \cdot \underline{b}}{||\underline{a}||\,||\underline{b}||}$$

Man wählt für α immer den Bereich zwischen 0 und π (bzw. 0° und 180°).

Damit definiert das Skalarprodukt einen Längen- und Winkelbegriff.

Ein Satz von Vektoren $\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n$ heißt **orthonormal**, wenn die Vektoren

- paarweise orthogonal, d. h. $\underline{x}_i \cdot \underline{x}_j = 0$ wenn $i \neq j$, und
- normiert, d. h. $||\underline{x}_i|| = 1$,

sind.

Übungsaufgaben

Aufgabe 23

Wir betrachten das Dreieck im $\mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten

$$\underline{a} \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{c} \;=\; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Kantenlängen und die Winkel in den Ecken des Dreiecks!

Aufgabe 24

Wir betrachten den Vektor

$$\underline{a} = r \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\lambda \\ \cos\phi\sin\lambda \\ \sin\phi \end{pmatrix}$$

in (geographischen) Kugelkoordinaten, wobei ϕ der Breitengrad und λ der Längengrad ist. Berechnen Sie die Vektoren $\underline{e}_r = \frac{\partial}{\partial r}\underline{a}$, $\underline{e}_\phi = \frac{\partial}{\partial \phi}\underline{a}$ und $\underline{e}_\lambda = \frac{\partial}{\partial \lambda}\underline{a}$, indem Sie $\underline{a}$ komponentenweise ableiten! Überprüfen Sie, ob die Vektoren orthogonal bzw. orthonormal sind, und interpretieren Sie die Vektoren geometrisch!

3.5 Linearkombinationen und lineare Abhängigkeit

Die Kombination von Addition und Streckung von Vektoren wird als Linearkombination bezeichnet. Sind $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ Vektoren (d. h. Elemente eines Vektorraumes) und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ reelle Zahlen, wird der Vektor

$$\underline{x} \;=\; \lambda_1 \underline{a}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{a}_n$$

als **Linearkombination** der Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ bezeichnet.

Ein Satz von Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ heißt **linear abhängig**, wenn es eine nichttriviale Linearkombination aus ihnen gibt (nicht alle Zahlen $\lambda_i = 0$), welche den Nullvektor ergibt:

$$\lambda_1 \underline{a}_1 + \ldots + \lambda_n \underline{a}_n \;=\; \underline{0}$$

Andernfalls, d. h. wenn sich diese Bedingung nur durch $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ erfüllen lässt, werden die Vektoren als **linear unabhängig** bezeichnet.

Es gilt: Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn sich mindestens einer von ihnen als Linearkombination der restlichen darstellen lässt. Dies könnte als alternative (vielleicht anschaulichere) Definition von linearer Abhängigkeit benutzt werden. und ist evtl. in der Praxis etwas leichter zu überprüfen als die ursprüngliche Definition.

Linear unabhängige Vektoren sind natürlich nicht unbedingt paarweise senkrecht zueiander. Umgekehrt gilt aber:

- Jeder Satz von orthogonalen Vektoren ist linear unabhängig, sofern keiner der Vektoren der Nullvektor ist.
- Jeder Satz von orthonormalen Vektoren ist linear unabhängig.

Übungsaufgaben

Aufgabe 25

(a) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^2$ linear unabhängig?

(b) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

(c) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

(d) Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

Aufgabe 26

Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

(a) Nehmen wir von n linear unabhängigen Vektoren einen weg, so sind die verbleibenden $n-1$ Vektoren ebenfalls linear unabhängig.

(b) Nehmen wir von n linear abhängigen Vektoren einen weg, so sind die verbleibenden $n-1$ Vektoren ebenfalls linear abhängig.

(c) Fügen wir zu n linear unabhängigen Vektoren einen weiteren Vektor hinzu, so sind die $n+1$ Vektoren ebenfalls linear unabhängig.

(d) Fügen wir zu n linear abhängigen Vektoren einen weiteren Vektor hinzu, so sind die $n+1$ Vektoren ebenfalls linear abhängig.

3.6 Unterräume

Eine Teilmenge eines Vektorraums V, welche selbst wieder ein Vektorraum ist, wird als **Unterraum** (des Vektorraums V) bezeichnet.

Wenn überprüft werden soll, ob eine Teilmenge eines Vektorraums ein Unterraum ist, müssen nicht alle Eigenschaften A1–A5, S1–S3 und AS1–AS2 überprüft werden. Es genügen die Eigenschaften A1 (d. h. durch Addition zweier Vektoren aus der Teilmenge verlässt man diese nicht) und S1 (d. h. durch Streckung eines Vektors aus der Teilmenge verlässt man diese nicht).

In jedem Vektorraum gibt es die trivialen Unterräume:

- der Vektorraum selbst
- der Unterraum, der nur aus dem Nullvektor besteht.

Die Menge aller Linearkombinationen aus Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ bildet einen Unterraum. Dieser wird **lineare Hülle** der Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ oder als der von $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ **aufgespannte** Unterraum, kurz $\mathrm{span}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$, bezeichnet.

Übungsaufgaben

Aufgabe 27

Bildet die Menge der Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$, für die gilt:

(a) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

(b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$

(c) $x_1 + 2\,x_2 - 3\,x_3 = 0$

(d) $x_1 + x_2 = 0 \quad \text{und} \quad x_2 + x_3 = 0$

(e) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

jeweils einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 28

(a) Wir betrachten einen Euklidischen Vektorraum. Für welche reellen Zahlen c bildet die Menge aller Vektoren $\underline{x}$ für die gilt: $\underline{a} \cdot \underline{x} = c$, wobei $\underline{a}$ ein gegebener Vektor ist, einen Unterraum?

(b) Wir betrachten einen normierten Vektorraum. Für welche reellen Zahlen c bildet die Menge aller Vektoren $\underline{x}$ für die gilt: $||\underline{x}|| = c$, einen Unterraum?

Aufgabe 29

Seien ϑ und φ zwei gegebene Winkel. Bildet die Menge der Vektoren der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, für die gilt:

$$(x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi) \sin\vartheta + x_3 \cos\vartheta \quad = \quad 0$$

einen Unterraum des $\mathbb{R}^3$? Beschreiben Sie diese Menge geometrisch, und erläutern Sie die Bedeutung der Winkel ϑ und φ!

3.7 Dimension

Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in einem Vektorraum wird als **Dimension** des Vektorraumes bezeichnet.

Beispiele:

- $\mathbb{R}^n$ ist n-dimensional.
- Die Menge aller Vektoren der Form $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist ein eindimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^2$.
- Die Menge der Vektoren $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, für die $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ gilt, ist ein zweidimensionaler Unterraum des $\mathbb{R}^3$.
- Sind $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ Vektoren, ist $\mathrm{span}(\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n)$ ein n-dimensionaler Unterraum, wenn die Vektoren linear unabhängig sind. Sind die Vektoren linear abhängig, ist seine Dimension kleiner als n.
- Der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist unendlichdimensional und damit wesentlich komplizierter als alle Vektorräume endlicher Dimension.

Aus der Definition der Dimension ergibt sich unmittelbar, dass die Dimension eines Unterraums nicht größer als die des ursprünglich betrachteten Vektorraums sein kann.

Unterräume der Dimension $n - 1$ eines n-dimensionalen Vektorraums werden als **Hyperebenen** bezeichnet. In jedem Euklidischen Vektorraum bildet die Menge aller Vektoren, welche auf einem gegebenen Vektor $\underline{a} \neq \underline{0}$ senkrecht stehen, eine Hyperebene. Umgekehrt kann man jede Hyperebene durch einen solchen Normalenvektor darstellen.

Übungsaufgaben

Aufgabe 30

Welche Dimension haben die in Aufgabe 27 vorkommenden Unterräume des $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 31

Welche Unterräume besitzt $\mathbb{R}^3$, und welche Dimension haben diese jeweils?

3.8 Lineare Abbildungen

Eine Abbildung F von einem Vektorraum in einen anderen Vektorraum (es kann auch derselbe Vektorraum wie der erste sein) heißt **linear**, wenn sie sich in folgender Weise mit der Addition und der Streckung von Vektoren „verträgt“:

L1 Für alle Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ ist $F(\underline{a}+\underline{b}) = F(\underline{a}) + F(\underline{b})$.

L2 Für alle Vektoren $\underline{a}$ und alle reellen Zahlen λ ist $F(\lambda\underline{a}) = \lambda\, F(\underline{a})$.

Hieraus folgen einige weitere Eigenschaften, z. B. $F(\underline{0}) = \underline{0}$.

Man kann auch beide Kriterien zusammenfassen: Für alle Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$ und alle reellen Zahlen λ und μ ist

$$F(\lambda\underline{a} + \mu\underline{b}) = \lambda F(\underline{a}) + \mu F(\underline{b})$$

Dies bedeutet, dass diejenigen Abbildungen linear sind, die sich mit der Linearkombination von Vektoren „vertragen“.

Grundsätzlich können wir natürlich Abbildungen von irgendeinem Vektorraum in irgendeinen Vektorraum betrachten. Unter diesen sind zwei Spezialfälle besonders wichtig:

- Lineare Abbildungen eines Vektorraums in den einfachsten nichttrivialen (d. h. der nicht nur aus einem Nullvektor besteht) Vektorraum, nämlich in die reellen Zahlen selbst. Diese werden als **Linearformen** bezeichnet.
- Lineare Abbildungen, welche von einem Vektorraum in diesen selbst gehen (also nicht von einem Vektorraum in einen anderen). Diese werden als **Endomorphismen** bezeichnet und sind ein Beispiel dafür, dass nicht nur Geologen furchtbare Fachwörter verwenden.

Im Folgenden beschränken wir uns auf den zweiten Spezialfall, d. h. auf lineare Abbildungen von einem Vektorraum in diesen selbst.

Die linearen Abbildungen vom einfachsten Vektorraum – den reellen Zahlen – in sich selbst, sind sehr einfach. Es gilt nämlich:

$$F(x) = F(x1) = x\, F(1)$$

d. h. diese Abbildungen multiplizieren x nur mit einem konstanten Faktor, nämlich $F(1)$. Zu beachten ist, dass die Funktionen, die in der Analysis einer Variablen als lineare Funktionen bezeichnet werden: $f(x) = a + b\,x$, nur für $a = 0$ lineare Abbildungen sind.

Die linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ sind schon komplizierter und werden im nächsten Abschnitt behandelt.

Die einfachsten linearen Abbildungen, die es in jedem Vektorraum gibt, sind

- die **Nullabbildung**, welche jeden Vektor auf den Nullvektor abbildet,
- die **Identität**, die jeden Vektor auf sich selbst abbildet (also unverändert lässt) und
- die **Streckung** um einen festen Faktor λ, d. h. $F(\underline{x}) = \lambda \underline{x}$.

Vorsicht: Die Verschiebung um einen festen Vektor $\underline{a}$, d. h. $F(\underline{x}) = \underline{x} + \underline{a}$ ist keine lineare Abbildung.

Da für alle Vektoren $0\underline{a} = \underline{0}$ und $1\underline{a} = \underline{a}$ gilt, ist es kein Problem, für als Symbole für Nullabbildung und Identität mit die Zahlen 0 und 1 zu verwenden.

3.9 Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$

Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ nach $\mathbb{R}^3$ haben eine direkte geometrische Bedeutung. In der Strukturgeologie beschreiben diese eine homogene Deformation eines Gesteins. Da der Fall $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ weniger Schreibarbeit als der Fall $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ bedeutet und anschaulicher ist, beschränken wir uns zunächst auf diesen.

Im Folgenden leiten wir eine einfache Darstellung beliebiger linearer Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ her. Jeder Vektor $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ lässt sich als Linearkombination der Vektoren $\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ darstellen:

$$\underline{x} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2$$

Für jede lineare Abbildung F gilt daher

$$F(\underline{x}) = F(x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2) = x_1 \, F(\underline{e}_1) + x_2 \, F(\underline{e}_2)$$

Nennen wir

$$F(\underline{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F(\underline{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

können wir schreiben:

$$F(\underline{x}) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

Jede lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ kann also durch Angabe von vier Zahlen charakterisiert werden.

3.10 Matrizen

Für die Darstellung einer linearen Abbildung aus dem letzten Abschnitt gibt es eine Kurzschreibweise. Man ordnet die vier Zahlen a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} als 2×2-**Matrix** an:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

und definiert

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

A heißt **Matrix zu** F. Die Anwendung von F auf einen Vektor $\underline{x}$ kann also dargestellt werden als Multiplikation der Matrix A mit $\underline{x}$:

$$F(\underline{x}) = A\underline{x}$$

Die erste Spalte der Matrix ist also der Vektor, der herauskommt, wenn man F auf $\underline{e}_1$ anwendet, die zweite Spalte ist $F(\underline{e}_2)$.

Zumindest in $\mathbb{R}^2$ können wir also lineare Abbildungen und Matrizen miteinander identifizieren und müssen diese nicht strikt unterscheiden. Die Begriffe, die wir im Folgenden kennenlernen, sind auf lineare Abbildungen und Matrizen gleichwertig anwendbar.

Zur Nullabbildung gehört natürlich die **Nullmatrix** $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Zur Identität gehört die **Einheitsmatrix** $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 32

(a) Wir betrachten die Abbildung F von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ mit

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Ist F linear? Beschreiben Sie F geometrisch! Bestimmen Sie die Matrix von F, falls F linear ist!

(b) Sei s eine gegebene (feste) reelle Zahl. Wir betrachten die Abbildung F von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ mit

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} s\,x_1 \\ \frac{x_2}{s} \end{pmatrix}$$

Ist F linear? Beschreiben Sie F geometrisch! Bestimmen Sie die Matrix von F, falls F linear ist!

(c) Sei γ eine gegebene (feste) reelle Zahl. Wir betrachten die Abbildung F von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ mit

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + \gamma\, x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Ist F linear? Beschreiben Sie F geometrisch! Bestimmen Sie die Matrix von F, falls F linear ist!

(d) Sei φ eine gegebene (feste) reelle Zahl. Wir betrachten die Abbildung F von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ mit

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi \\ x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Ist F linear? Beschreiben Sie F geometrisch! Bestimmen Sie die Matrix von F, falls F linear ist!

3.11 Verkettung linearer Abbildungen und Matrixmultiplikation

2×2-Matrizen lassen sich (wie Matrizen beliebiger Größe) nach naheliegenden Regeln addieren und mit Zahlen multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{11}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

Da diese Addition und Multiplikation mit Zahlen alle in Abschnitt 2.1 aufgestellten Bedingungen an einen Vektorraum erfüllt, bilden die 2×2-Matrizen selbst wieder einen Vektorraum. Seine Dimension ist vier. Dasselbe gilt für die linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$ mit der Addition und Multiplikation mit Zahlen:

$$(F+G)(\underline{x}) = F(\underline{x}) + G(\underline{x}) \quad \text{und} \quad (\lambda F)(\underline{x}) = \lambda\, F(\underline{x})$$

Mit linearen Abbildungen kann man aber mehr machen als Addition und Mulitiplikation mit Zahlen: Man kann zwei (oder auch mehrere) lineare Abbildungen hintereinander ausführen, wobei sich wieder eine lineare Abbildung ergibt. Im Fall von zwei linearen Abbildungen F und G lässt sich dies leicht einsehen:

$$F(G(\lambda\underline{a} + \mu\underline{b})) = F(\lambda G(\underline{a}) + \mu G(\underline{b})) = \lambda F(G(\underline{a})) + \mu F(G(\underline{b}))$$

Die Hintereinanderausführung – auch als **Verkettung** bezeichnet – kann als eine Multiplikation angesehen werden. Diese wird entweder mit einem Kreis $F \circ G$ oder ohne Multiplikationssymbol FG

geschrieben. Lineare Abbildungen sind also Vektoren, die sich miteinander so multiplizieren lassen, dass das Ergebnis wieder ein Vektor ist. Für diese Multiplikation gelten einige der Regeln, die für die Multiplikation von Zahlen gelten. Zwei Eigenschaften der Multiplikation reeller Zahlen gelten für die Verkettung linearer Abbildungen allerdings nicht:

- Die Verkettung linearer Abbildungen ist nicht kommutativ, d. h. i. A. ist $FG \neq GF$ (FG heißt zuerst G, danach F).
- Während es zu jeder reellen Zahl $x \neq 0$ eine inverse Zahl $\frac{1}{x}$ (auch als x^{-1} bezeichnet) gibt, sodass $x\frac{1}{x} = 1$, gibt es nur für einige lineare Abbildungen F eine **Inverse** F^{-1} sodass $GF = FG = 1$ ($1 =$ Identität). Solche Abbildungen werden als **invertierbar** bezeichnet.

Da die Verkettung zweier linearer Abbildungen wieder linear ist, besitzt (zumindest) in $\mathbb{R}^2$ auch diese eine Matrix. Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ die Matrix zur Abbildung F, und $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ die Matrix zur Abbildung G. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F(G(\underline{x})) &= A(B\underline{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11}x_1 + b_{12}x_2 \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21})\,x_1 + (a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22})\,x_2 \\ (a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21})\,x_1 + (a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22})\,x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \underline{x} \end{aligned}$$

Die Matrix der Verkettung FG ist also das folgende Produkt der Matrizen A und B:

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Diese Multiplikation wird als **Matrixmultiplikation** bezeichnet. Man kann sie sich beispielsweise auf folgende Arten einprägen:

- i-te Zeile von A mal j-te Spalte von B ergibt das Element in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte. Kurz: Zeile mal Spalte.
- Multiplikation von A mit der j-ten Spalte von B liefert die j-te Spalte der Produktmatrix.

Für die Matrixmultiplikation gelten natürlich dieselben Regeln wie für die Verkettung linearer Abbildungen, d. h. also auch dieselben wie für die Multiplikation reeller Zahlen, außer:

- Die Matrixmultiplikation ist nicht kommutativ, d. h. i. A. ist $AB \neq BA$.
- Es gibt nicht zu jeder Matrix $A \neq 0$ eine Inverse.

Übungsaufgaben

Aufgabe 33

Berechnen Sie die Matrix der Verkettung GF und die von FG für die folgenden linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$!

(a) $F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$ und $G(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

(b) $F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi \\ x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi \end{pmatrix}$ und $G(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \cos\psi - x_2 \sin\psi \\ x_1 \sin\psi + x_2 \cos\psi \end{pmatrix}$
mit gegebenen (festen) Winkeln φ und ψ. Welches Ergebnis hätten Sie anhand der geometrischen Interpretation aus Aufgabe 31 (d) erwartet?

3.12 Spur und Determinante

Für 2×2-Matrizen definiert man **Spur** und **Determinante** als

$$\mathrm{spur}A = a_{11} + a_{22} \quad \text{bzw.} \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Die Spur ist eine Linearform des Vektorraumes der 2×2-Matrizen, d. h. es gilt:

$$\mathrm{spur}(A + B) = \mathrm{spur}A + \mathrm{spur}B \quad \text{und} \quad \mathrm{spur}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{spur}A$$

Weiterhin gilt

$$\mathrm{spur}(AB) = \mathrm{spur}(BA) \quad (\text{aber } \neq \mathrm{spur}A\,\mathrm{spur}B)$$

Die für uns wichtigsten Eigenschaften der Determinante sind:

- Die Determinante einer Matrix ist genau dann null, wenn ihre Spalten linear abhängig sind.
- Die Determinante eine Matrix ändert sich nicht, wenn man ein Vielfaches einer Spalte zu einer anderen Spalte addiert.
- $|\det A|$ ist die Fläche des von den beiden Spalten (als Vektoren des $\mathbb{R}^2$ interpretiert) aufgespannten Parallelogramms (Begründung folgt später).
- Eine Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\det A \neq 0$. In diesem Fall lässt sie die Inverse einer 2×2-Matrix leicht berechnen:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

- $\det(AB) = \det A \det B$

Die Determinante ist allerdings keine lineare Abbildung, i. A. ist

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B \quad \text{und} \quad \det(\lambda A) \neq \lambda \det A$$

Spur bzw. Determinante einer linearen Abbildung F von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ definiert man als Spur bzw. Determinante der zugehörigen 2×2-Matrix. Da die Spalten der Matrix $F(\underline{e}_1)$ und $F(\underline{e}_2)$ sind, ist $|\det F|$ die Fläche des von $F(\underline{e}_1)$ und $F(\underline{e}_2)$ aufgespannten Parallelogramms, d. h. die relative Flächenänderung, die F verursacht. Demnach sind die linearen Abbildungen mit $\det F = \pm 1$ diejenigen, bei denen Flächeninhalte unverändert bleiben. In der Strukturgeologie werden die lineraren Abbildungen mit $\det F = 1$ als **Scherungen** bezeichnet.

Aufgabe 34

Berechnen Sie Determinante und Spur der linearen Abbildungen aus Aufgabe 31! Finden Sie heraus, welche der Abbildungen invertierbar sind, und berechnen Sie für diese die Matrix der Inversen!

3.13 Eigenwerte

Besondere Bedeutung für eine lineare Abbildung F haben die Vektoren $\underline{x} \neq \underline{0}$, welche durch die Abbildung nur gestreckt bzw. gestaucht werden (d. h. anschaulich, deren Richtung sich nicht ändert):

$$F(\underline{x}) = \lambda \underline{x}$$

Solche Vektoren werden als **Eigenvektoren** von F (oder der zugehörigen Matrix A) bezeichnet. In der Strukturgeologie werden diese als **nichtrotierende Linien** bezeichnet. Der Streckungsfaktor λ wird als **Eigenwert** bezeichnet.

Die Eigenvektoren zu einem gegebenen Eigenwert λ bilden (wenn man den Nullvektor, der streng genommen kein Eigenverktor ist, hinzunimmt) einen Unterraum, der als **Eigenraum** zum Eigenwert λ bezeichnet wird.

Für lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ bzw. für 2×2-Matrizen ist die Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren einigermaßen einfach. Ist

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

die Matrix zur Abbildung F, so sind Eigenwerte und Eigenvektoren durch die Bedingung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

festgelegt. Diese lässt sich umschreiben in

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

also

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es gibt genau dann einen Vektor $\underline{x} \neq \underline{0}$, der diese Bedingung erfüllt, wenn die Vektoren $\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda \\ a_{21} \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22}-\lambda \end{pmatrix}$ linear abhängig sind, d. h. wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

ist. Diese Größe wird als **charakteristisches Polynom** von F bzw. A bezeichnet:

$$P_F(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = \lambda^2 - \mathrm{spur}A\lambda + \det A$$

Die Eigenwerte einer linearen Abbildung sind also die Nullstellen von $P_F(\lambda)$.

Im Fall einer linearen Abbildung des $\mathbb{R}^2$ bzw. einer 2×2-Matrix ist $P_F(\lambda)$ ein quadratisches Polynom, welches keine, eine oder zwei Nullstellen besitzt. Besitzt es Nullstellen λ_1 und λ_2 (es darf $\lambda_1 = \lambda_2$) sein, lässt es sich in der Form

$$P_F(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2$$

schreiben, sodass

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{spur}F \quad \text{und} \quad \lambda_1\lambda_2 = \det F$$

ist. Es empfiehlt sich, die gefundenen Eigenwerte anhand dieser Beziehungen zu überprüfen.

Scherungen in $\mathbb{R}^2$ haben also die Eigenschaft $\lambda_1\lambda_2 = 1$. Ein wichtiger Spezialfall ist hierbei $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. In der Strukturgeologie werden solche Scherungen, (die also eine Linie besitzen, die völlig unverändert bleibt), als **einfache Scherung** bezeichnet. Diese lassen sich charakterisieren durch die Bedingungen $\det F = 1$ (Bedingung für Scherung) und $\mathrm{spur}F = 2$.

Nachdem wir die Eigenwerte bestimmt haben, lassen sich die zugehörigen Eigenvektoren leicht aus dem **linearen Gleichungssystem**

$$\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Da die Eigenvektoren zu einem Eigenwert einen Unterraum bilden, gibt es unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 35

Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der linearen Abbildungen aus Aufgabe 31!

Index