INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND
WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN

Optimierung I

Übungsblatt 2

Bearbeitung bis 25. März 2014

Als Minimierungsproblem in kanonischer Form bezeichnen wir ein Problem der Form

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^{\mathrm{T}} x \quad \text{unter} \quad Ax = b,\ x \geq 0$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$ und $c \in \mathbb{R}^n$ mit $m, n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.1: [Freie Variablen und kanonische Form]
Gegeben sei folgendes Minimierungsproblem:

$$\min_{y_1, y_2, y_3} 3y_1 + 5y_2 - y_3 \quad \text{unter} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ 4y_2 - y_3 = -1, \end{cases} \qquad y_1 \geq 0,\ y_3 \leq 0 \tag{1}$$

i) Bringen Sie (1) auf kanonische Form indem sie die unrestringierte Variablen y_2 durch $y_2 = u - v$ mit $u, v \geq 0$ ersetzen.

ii) Bringen sie (1) auf ein Minimierungsproblem in kanonischer Form mit nur zwei Unbekannten.

Aufgabe 2.2: [Schlupf-/Überschussvariablen und kanonische Form]
Bringen Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{y_1, y_2, y_3, y_4} y_1 + 2y_4 \quad \text{unter} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \leq 15 \\ y_1 - y_2 + y_3 - y_4 = 0 \\ 2y_1 + y_3 \geq 4, \end{cases} \qquad y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

durch Hinzunahme von Schlupf- und Überschussvariablen auf eine kanonische Form.

Aufgabe 2.3: [L^1-Minimierungsprobleme]
Zeigen Sie, dass

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{unter} \quad Ax = b$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ äquivalent als lineares Programm geschrieben werden kann und leiten Sie eine kanonische Form her.

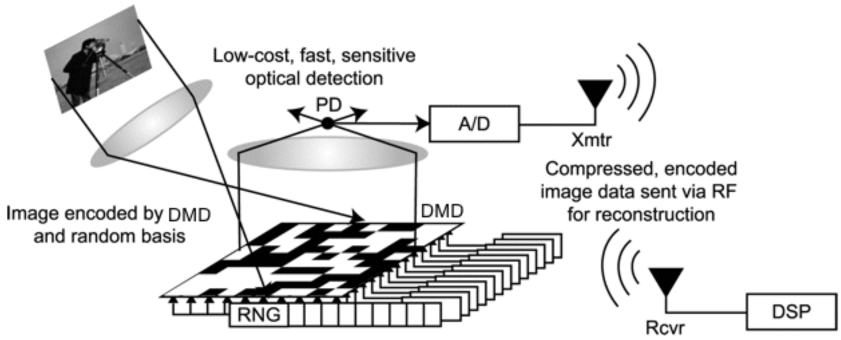
Aufgabe 2.4: [Kanonische Form, allgemein]
Seien $k \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}^k$. Für $i \in \{1, 2, 3\}$, sei $m_i \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, $A_i \in \mathbb{R}^{m_i \times k}$ eine Matrix und $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ ein Vektor. Angenommen das lineare Minimierungsproblem

$$\min_{z \in \mathbb{R}^k} a^T z \quad \text{unter den Bedingungen} \quad \begin{cases} A_1 z \geq b_1 \\ A_2 z \leq b_2 \\ A_3 z = b_3 \end{cases} \tag{2}$$

besitzt eine Lösung. Zeigen sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $\mathrm{rang}(A) = m$ und Vektoren $b \in \mathbb{R}^m$, $b \geq 0$, $c \in \mathbb{R}^n$, mit $n, m \in \mathbb{N}$, existieren so dass (2) äquivalent ist zu dem in kanonischer Form gegebenen Minimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{unter den Bedingungen } \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0. \end{cases} \tag{3}$$

Aufgabe 2.5 (Zusatzaufgabe): [Ein-Pixel-Kamera]
Die Theorie des sogenannten "Compressive Imaging" beschäftigt sich mit der Rekonstruktion von Bildern aus unvollständigen Daten. Diese kommt in der "Ein-Pixel-Kamera" an der Rice University http://dsp.rice.edu/cscamera zu Anwendung:



Das aufzunehmende Bild wird hierbei nur indirekt gemessen: Eine Anordnung von Spiegeln steuert, ob die Information eines Pixels in den Sensor gelangt oder nicht; der Sensor misst daher nur die Summe über bestimmte Pixel. Es werden nun eine Reihe von Zufallsmustern angelegt und das Resultat aufgenommen. Typischerweise ist die Anzahl der Messungen viel geringer als die Anzahl der Pixel. Das Bild $(x_{ij})_{ij}$, $i = 1, \dots N$, $j = 1, \dots, M$ soll nun aus den Daten

$$b_k = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} a_{ij}^k x_{ij} \qquad k = 1, \dots, K\ , \quad a_{ij}^k \in \{0, 1\}$$

rekonstruiert werden. Ein Ansatz ist die Minimierung des Funktionals

$$\min_{x\in\mathbb{R}^{NM}} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} |(D_1x)_{ij}| + |(D_2x)_{ij}| \qquad \text{unter} \qquad \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} a_{ij}^k x_{ij} = b_k\ ,\ k = 1, \dots, K \tag{$*$}$$

mit den Finite-Differenzen-Operatoren

$$(D_1x)_{ij} = \begin{cases} x_{i+1,j} - x_{ij} & \text{falls } i < N \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \qquad (D_2x)_{ij} = \begin{cases} x_{i,j+1} - x_{ij} & \text{falls } j < M \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, daß es sich bei ($*$) um ein lineares Programm handelt und leiten Sie eine Standardform her.