MAT.256 / SS 2014
Martin Holler

INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND
WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN

Optimierung I

Übungsblatt 1

Bearbeitung bis 18. März 2014

Aufgabe 1.1: [Produktions-Problem]
Eine Unternehmerin stellt zwei Gürteltypen A und B von unterschiedlicher Qualität her. Zur Erzeugung eines Gürtels von Typ A werden 2 Zeiteineinheiten benötigt, für Typ B reicht eine Zeiteinheit aus. Täglich stehen zur Erzeugung 1000 Zeiteinheiten zur Verfügung. Die Lederbelieferung erlaubt eine Erzeugung von höchstens 800 Gürteln pro Tag. Weiterhin stehen höchstens 400 Schnallen für Gürtel vom Typ A und 700 Schnallen für Gürtel vom Typ B zur Verfügung. Der Nettogewinn beträgt 5 Euro für Gürtel A und 3,75 Euro für Gürtel B. Wie soll der Produktionsplan aussehen um einen möglichst großen Nettogesamtgewinn zu erzielen?

i) Formulieren sie die Aufgabenstellung als lineares Maximierungsproblem: Angenommen die Unbekannten x_1 und x_2 beschreiben die tägliche Produktionsmenge eines Gürtels von Typ A und B, bestimmen sie eine Matrix A und Vektoren b, c, so dass ein optimaler Produktionsplan das Maximierungsproblem

$$\max_{x=(x_1,x_2)^T} c^T x \quad \text{unter der Bedingung} \quad Ax \leq b$$

löst.

ii) Skizzieren sie alle für die Unternehmerin möglichen Produktionsmengen als Menge in der Ebene.

Aufgabe 1.2: [Lineares Gleichungssystem]
Lineare Nebenbedingungen eines Optimierungsproblems mit unbekannter $x \in \mathbb{R}^n$ werden typischerweise als $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ beschrieben. Die Standardannahme ist hierbei, dass $\operatorname{rang}(A) = m$. Das folgende Beispiel erinnert daran, dass diese Annahme nur unwesentliche Fälle ausschließt:

i) Gegeben sei folgende Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Finden sie eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $\operatorname{rang}(B) = 3$ und einen Vektor $y \in \mathbb{R}^3$ so dass gilt: $x \in \mathbb{R}^4$ löst (1) genau dann wenn $Bx = y$.

ii) Für $m, n \in \mathbb{N}$ sei $b \in \mathbb{R}^m$ ein Vektor und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Matrix mit $k := \operatorname{rang}(\mathrm{A})$. Zeigen sie:

Falls $k < m$ hat die Gleichung $Ax = b$ entweder keine Lösung $x \in \mathbb{R}^n$ oder es gibt eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{k\times n}$ mit $\operatorname{rang}(B) = k$ und einen Vektor $y \in \mathbb{R}^k$ so dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt,

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad Bx = y.$$

Aufgabe 1.3: [Einfaches Optimierungsproblem]
Lösen sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\max_{x=(x_1,x_2)^T} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad \text{unter der Bedingung} \qquad \begin{cases} \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq 6, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Aufgabe 1.4: [Extremalpunkte]
Ein Punkt x einer konvexen Menge C heißt Extremalpunkt, falls es keine zwei Punkte $y \neq z$ in C gibt so dass $x = \lambda y + (1-\lambda)z$ für $0 < \lambda < 1$. Bestimmen Sie alle Extremalpunkte folgender konvexer Mengen:

i) $K_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq 1 \right\}$,

ii) $K_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$,