Proseminar Lineare Algebra II, SS 02
5. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 24. 4. 2002

---

1. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}(n \times n, K)$.
   Zeige auf zwei Arten: Ist A eine obere Dreiecksmatrix, die zusätzlich in der Hauptdiagonale nur Nullen als Einträge hat, so ist A nilpotent.
   Hinweis: Betrachte die Eigenwerte von A (erste Methode); betrachte die Form der A^k, $k = 1, 2, \ldots$ (zweite Methode).

2. Es sei K und n wie in der ersten Aufgabe und es sei $N \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ definiert durch $N := (0, e^1, e^2, \ldots, e^{n-1})$, wobei $e^k := e_k^\top$.
   Zeige, daß N nilpotent ist und daß $N^k = (0, 0, \ldots, 0, e^1, e^2, \ldots, e^{n-k})$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$

3. (a) Zeige, daß für jede nilpotente Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n, K)$ die Matrix $E_n + A$ invertierbar ist, und gib eine explizite Formel für $(E_n + A)^{-1}$ an.

   (b) Zeige, daß

   $$A := \begin{pmatrix} -5 & 5 & 8 & 3 \\ -5 & 5 & 9 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}(4 \times 4, \mathbb{R})$$

   nilpotent ist, und berechne $(E_4 + A)^{-1}$.

4. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda \in K$. Ferner sei $J := J(\lambda) := \lambda E_n + N$ mit der Matrix N aus Aufgabe 2.
   Berechne explizit J^k für $k = 0, 1, 2, \ldots$
   Hinweis: Für vertauschbare quadratische Matrizen A, B kann $(A+B)^k$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes berechnet werden.