Proseminar Lineare Algebra II, SS 2002

4. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 17. 4. 2002

1. Ist die Matrix
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$
über $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ triagonalisierbar? Geben Sie–falls möglich–eine Basistransformation an, welche A auf Triagonalform bringt.

2. Zeigen Sie:

   (a) Ähnliche Matrizen haben dasselbe Minimalpolynom.

   (b) Die Matrizen ($a \in \mathbb{R}$)
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$$
   sind nicht ähnlich

3. Zeigen Sie: Ist $F : V \to V$ linear und $S, T \in \mathbb{K}[t]$, so ist
$$(S \cdot T)(F) = S(F) \circ T(F) = T(F) \circ S(F).$$

4. Sei $F : V \to V$ ein Endomorphismus des $\mathbb{K}$-Vektorraumes V. Zeigen Sie:

   (a) Die Abbildung $\phi_F : \mathbb{K}[t] \to \mathrm{End}(V)$, $S(t) \mapsto S(F)$ ist ein Homomorphismus von Ringen und von $\mathbb{K}$-Vektorräumen.

   (b) $\mathbb{K}[F] = \{T(F) : T \in \mathbb{K}[t]\}$ ist ein kommutativer Unterring von $\mathrm{End}(V)$.

5. Zeigen Sie unter den Voraussetzungen von Aufgabe 4., dass für $\dim V = n < +\infty$ die Existenz eines normierten Polynoms $P \in \mathbb{K}[t]$ vom Grad $\leq n^2$ mit $P(F) = 0$ folgt.

6. Sei $F \in \mathrm{End}(V)$ nilpotent, und seien $v \in V$, $v \neq 0$, und U der von $v, F(v), \ldots, F^k(v), \ldots$ aufgespannte Unterraum von V. Zeigen Sie: Es existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von U, so dass die Restriktion $F|U$ von F auf U durch die $m \times m$-Matrix
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$
mit $m = \dim U$, dargestellt wird.