Proseminar Lineare Algebra II, SS 2002

3. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 10. 4. 2002

---

1. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und es sei $T \in \mathrm{GL}(n;K)$. Zeige, daß die Abbildung
$$\mathrm{M}(n \times n;K) \ni A \mapsto T^{-1}AT \in \mathrm{M}(n \times n;K)$$
ein Ringisomorphismus ist.

2. Es sei $A \in \mathrm{M}(n \times n;\mathbb{C})$ diagonalisierbar mit Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Zeige, daß für alle $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{C}$ die Matrix $\sum_{j=0}^m a_j A^j$ ebenfalls diagonalisierbar ist und daß ihre Eigenwerte gegeben sind durch $\sum_{j=0}^m a_j \lambda_k^j$, $1 \leq k \leq n$.

3. Es sei $e^j := e_j^\top$ der transponierte j-te Einheitsvektor in $\mathbb{C}^n$ und es sei $C := (e^n, e^1, \ldots, e^{n-2}, e^{n-1}) \in \mathrm{M}(n \times n;\mathbb{C})$. Zeige, daß C diagonalisierbar ist und die n paarweise verschiedenen Eigenwerte ω_n^j, $0 \leq j \leq n-1$, besitzt, wobei $\omega_n := e^{2\pi i/n} = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$.

4. Eine Matrix $A \in \mathrm{M}(n \times n;\mathbb{C})$ heißt *zirkulant*, wenn es $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{C}$ gibt, so daß $A = \sum_{\ell=0}^{n-1} \alpha_\ell C^\ell =: Z(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ (C wie im vorigen Beispiel). Zeige, daß A von der Form
$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ ist, wobei $a_k := (\alpha_{n-k+1}, \alpha_{n-k+2}, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-k})$ für $1 \leq k \leq n$.
(Hinweis: Untersuche zunächst die Gestalt der C^ℓ für $0 \leq \ell \leq n-1$.)

5. Berechne in den Fällen $n = 3, 4$ für $Z(0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ das charakteristische Polynom und dessen Nullstellen.

6. Leite aus dem vorigen Beispiel eine Formel für die Lösungen der Gleichung dritten Grades $x^3 + ux + v = 0$ $(u, v \in \mathbb{C})$ her.
(Hinweis: Versuche $a, b \in \mathbb{C}$ zu finden, so daß $x^3 + ux + v = P_{Z(0,a,b)}(x)$)

7. Zeige, daß die „allgemeine“ Gleichung $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ mit Hilfe der Substitution $y = x - \alpha$ bei günstiger Wahl von α in eine Gleichung der Form $y^3 + uy + v = 0$ überführbar ist.