Proseminar Lineare Algebra II, SS 2002

2. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 20. 3. 2002

---

1. (a) Beweisen Sie: Wenn zwei Matrizen A und B dasselbe charakteristische Polynom haben und wenn alle Nullstellen des charakteristischen Polynoms einfach sind, dann sind A und B ähnlich.

   (b) Beschreiben Sie die Menge aller Matrizen in $M(3 \times 3, \mathbb{R})$, die die Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ und $\lambda_3 = 3$ besitzen.

2. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n, X die Menge aller Basen von V und $\mathcal{B} \in X$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\Phi : X \to \mathrm{Gl}(n; \mathbb{K}), \quad \mathcal{A} \mapsto T_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}(\mathrm{id})$$

   bijektiv ist.

3. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} -3 & 2a & 10 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & a & 2 \end{pmatrix}$$

   diagonalisierbar?

4. Es seien V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$.

   (a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren von f und f^{-1}, wenn f ein Automorphismus ist?

   (b) Welche Eigenwerte kann f haben, wenn $f^2 = \mathrm{id}_V$ gilt?

   (c) Welche Eigenwerte kann f haben, wenn $f^3 = f$ gilt?

5. Sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum und $F \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie, dass $P_F(0) \neq 0$ genau dann. wenn F ein Isomorphismus ist.

6. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & \cdots & & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 & -\alpha_1 \\ & 1 & \ddots & 0 & & \vdots \\ & & \ddots & & 0 & \vdots \\ & 0 & & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

   das charakteristische Polynom $P_A(t) = (-1)^n(t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \cdot + \alpha_1 t + \alpha_0)$ besitzt.