Proseminar Lineare Algebra II, SS 2002

1. Übungsblatt, auszuarbeiten bis 13. 3. 2002

---

1. Zeigen Sie, dass ein nilpotenter Endomorphismus die Null als einzigen Eigenwert hat.

2. Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenräume der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Zeigen Sie, dass die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

vier verschiedene Eigenwerte besitzt und daher diagonalisierbar ist. Bestimmen Sie eine Basis $\mathcal{A}$, sodass $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(A)$ eine Diagonalmatrix ist.

4. Sei V ein K-Vektorraum und $F : V \to V$ linear. Zeigen Sie: Hat $F^2 + F$ den Eigenwert -1, so besitzt F^3 den Eigenwert 1.

5. Gegeben sei die lineare Abbildung $F : D(I, \mathbb{R}) \to D(I, \mathbb{R})$ mit $F(\phi) = \phi''$, wobei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall ist und $D(I, \mathbb{R})$ den Vektorraum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf I bezeichnet.

   (a) Bestimmen Sie die reellen Eigenwerte von F.

   (b) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Eig}(F, -1)$.

6. Gegeben seien ein K-Vektorraum V und $F, G \in \mathrm{End}(V)$. Beweisen Sie:

   (a) Ist $v \in V$ ein Eigenvektor von $F \circ G$ zum Eigenwert $\lambda \in K$, und ist $G(v) \neq 0$, so ist $G(v)$ Eigenvektor von $G \circ F$ zum Eigenwert λ.

   (b) Ist V endlichdimensional, so haben $F \circ G$ und $G \circ F$ dieselben Eigenwerte. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Behauptung für unendlichdimensionales V nicht gilt.