Tridiagonalisierung einer 4x4-Matrix

$$A\_ := \begin{bmatrix} -5 & 5 & 8 & 3 \\ -5 & 5 & 9 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

A ist nilpotent, $A^4=0$; daher hat A 0 als einzigen EW;

folglich ist A tridiagonalisierbar.

Ein Eigenvektor ist $[1, 1, 0, 0]^T$

Erste Transformationsmatrix durch Ergänzung des EW zu einer Basis

des $\mathbf{R}^4$

$$S\_1 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A\_2 := S\_1^{-1} \cdot A\_ \cdot S\_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 & 8 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Also ist A_3 die 3x3-Matrix im rechten unteren Eck dieser Matrix.

$$A\_3 := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Ein EV von A_3 ist $[1, 0, -2]^T$

Dazugehörige. Matrix S_2

$$S\_2 := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S\_2^{-1} \cdot A\_3 \cdot S\_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Rechte untere Ecke

$$A\_4 := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$$

Ein EV ist $[1, -2]^T$

$$S\_3 := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S\_3^{-1} \cdot A\_4 \cdot S\_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Insgesamt (Ergänzung von S_3, S_2 zu 4x4-Matrix)

$$S\_3ext := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S\_2ext := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$S\_ext := S\_1 \cdot S\_2ext \cdot S\_3ext$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S\_ext^{-1} \cdot A\_ \cdot S\_ext = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$