Proseminar Optimierung I, SS 2003

9. Übungsblatt

auszuarbeiten bis 6.6.2003

Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ und $W_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $k = 1, 2, \ldots$, eine Familie stetiger Funktionen, welche die Bedingungen

(i) $x^k \to x \quad \Rightarrow \quad \liminf_{k\to\infty} W_k(x^k) \begin{cases} \geq 0, & \text{falls } x \in X, \\ +\infty, & \text{falls } x \notin X; \end{cases}$

(ii) für eine nichtleere Menge $M \subset X$ gilt: $\lim_{k\to\infty} W_k(x) = 0 \quad$ für alle $x \in M$.

1. Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$\text{minimiere } f(x) := 2x_1^2 + x_2^2 \text{ u.d.N. } x \in X := \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 - x_1 - x_2 \leq 0\}.$$

Wähle $W_k(x) := r_k(\max\{0, 1 - x_1 - x_2\})^2$ mit $r_k \to \infty$ für $k \to \infty$ und $r_k > 0$ für alle k. Ersetze das Ausgangsproblem durch *minimiere* $F_k(x) := f(x) + W_k(x)$ *für* $x \in \mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Folge von Lösungen $\{x^k\}$ der Ersatzaufgabe für $k \to \infty$ gegen die Lösung des Ausgangsproblems konvergiert.

2. Für allgemeines W_k seien die Ersatzprobleme

$$\text{minimiere } F_k(x) := f(x) + W_k(x) \text{ für } x \in \mathbb{R}^n,$$

für f hinreichend glatt, lösbar. Weiter bezeiche $\{x^k\}$ eine Folge von zugehörigen Lösungen. Das Ausgangsproblem *minimiere* $f(x)$ *u.d.N.* $x \in X$ genüge der Regularitätsbedingung $\inf_{x\in M} f(x) = \inf_{x\in X} f(x)$, wobei M aus (ii) sei. Zeige: Jeder Häufungspunkt der Folge $\{x^k\}$ ist eine Lösung des Ausgangsproblems.

3. Die Ausgangsaufgabe genüge der Regularitätsbedingung aus (2), und $\{\epsilon_k\} \subset \mathbb{R}^+$ sei eine vorgegebene beschränkte Folge. Zeige: Jeder Häufungspunkt $\bar{x}$ der Folge $\{x_\epsilon^k\}$ von ϵ_k-Lösungen der Ersatzprobleme, *i.e.*

$$F_k(x_\epsilon^k) \leq F_k(x) + \epsilon_k \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \ldots,$$

ist zulässig für das Ausgangsproblem, und es gilt:

$$f(\bar{x}) \leq f(x) + \limsup_{k\to\infty} \epsilon_k \text{ für alle } x \in X.$$

4. Es sei $\bar{x} \in X \cap \overline{M}$ eine strikte lokale Minimalstelle des Ausgangsproblems (in der Umgebung $B(r; \bar{x})$). Dann konvergiert jede Folge $\{x^k\}$ von Lösungen der lokalen Ersatzprobleme

$$\text{minimiere } F_k(x) \text{ u.d.N. } x \in \overline{B(r; \bar{x})} \tag{1}$$

gegen $\bar{x}$. Insbesondere existiert k_0 so, dass $\|x^k - \bar{x}\| < r$, $k \geq k_0$, für beliebige Lösungen x^k von (1).

5. Die Straffunktion W_k genüge der Bedingung

$$W_k(x) \begin{cases} = 0, & x \in X, \\ > 0, & x \notin X. \end{cases}$$

Zeige: Für jede Lösung x^k des Ersatzproblems gilt die Abschätzung

$$f(x^k) \leq F_k(x^k) \leq f(x) \quad \text{für alle } x \in X.$$