Proseminar Optimierung I, SS 2003

8. Übungsblatt

auszuarbeiten bis 30.5.2003

---

1. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär, $b \in \mathbb{R}^n$. Setzt man $x = A^T z$, so geht das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ über in $AA^T z = b$, dessen Matrix AA^T symmetrisch und positiv definit ist. Schreibe das CG-Verfahren für dieses Gleichungssystem so um, dass anstelle der Näherungen z^k die zugehörigen x^k auftreten und eine explizite Verwendung von AA^T vermieden wird.

2. Betrachte das CG-Verfahren zur Minimierung von $f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax - b^T x$, wobei A positiv definit und symmetrisch ist. Zeige, dass die Iterierten x^k die Funktion f über der linearen Mannigfaltigkeit
$$x^0 + \operatorname{span}(g^0, Ag^0, \ldots, A^{k-1}g^0),$$
mit $g^0 = \nabla f(x^0)$, minimieren.

3. Die Matrix A besitze die Form $A = Q + \sum_{i=1}^{k} v_i v_i^T$, wobei Q symmetrisch und positiv definit ist. Weiter seien v_i, $i = 1, \ldots, k$, Vektoren aus dem $\mathbb{R}^n$. Zeige, dass die Näherung x^{k+1} erzeugt durch das CG-Verfahren folgende Abschätzung erfüllt:
$$f(x^{k+1}) \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 f(x^0),$$
mit M und m der größte und kleinste Eigenwert von Q. Zeige weiter, dass x^{k+1} erzeugt durch das präkonditionierte CG-Verfahren mit $W = Q$ die Funktion f minimiert.

4. Betrachte $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx$ mit $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Zeige, dass das CG-Verfahren von der Art $x^{k+1} = x^0 + \gamma^{k0}g^0 + \cdots + \gamma^{kk}g^k$, mit $\gamma^{ij} \in \mathbb{R}$, ist. Weiter zeige, dass gilt:
$$x^{k+1} = (I + QP^k(Q))x^0,$$
wobei P^k ein Polynom vom Grad k ist.

5. (Fortsetzung von 4.). Zeige, dass das CG-Verfahren optimal ist für jedes k, in dem Sinne dass es $f(x^{k+1})$ über alle Koeffizienten $\gamma^{k0}, \ldots \gamma^{kk}$ minimiert, und dass für jedes k gilt:
$$f(x^{k+1}) = \min_{P^k} \frac{1}{2}(x^0)^T Q(I + QP^k(Q))^2 x^0.$$

6. (Fortsetzung von 5.). Seien λ_i, $i = 1, \ldots n$, die Eigenwerte von Q. Zeige, dass
$$f(x^{k+1}) \leq \max_i (1 + \lambda_i P^k(\lambda_i))^2 f(x^0) \text{ für alle } P^k, k.$$

7. Seien $n-k$ Eigenwerte von Q im Intervall $[a,b]$ mit $a > 0$, und seien die verbleibenden k Eigenwerte größer b. Dann besitzt das CG-Verfahren für beliebigen Startwert x^0 die Eigenschaft
$$f(x^{k+1}) \leq \left(\frac{b-a}{b+a}\right)^2 f(x^0).$$
Hinweis: Verwenden Aufgabe 6 und
$$1 + \lambda P^k(\lambda) = \frac{2}{(a+b)\lambda_1 \cdots \lambda_k}\left(\frac{a+b}{2} - \lambda\right)(\lambda_1 - \lambda)\cdots(\lambda_k - \lambda).$$