Proseminar Optimierung I, SS 2003

7. Übungsblatt

auszuarbeiten bis 16.5.2003

---

1. Betrachte das allgemeine Abstiegsverfahren mit $\{d^k\}$ gradientenähnlich bezüglich f und $\{x^k\}$, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sei. Die Bestimmung der Schrittweite erfolge mittels "backtracking", *i.e.* $t_k = \max\{\beta^l : l = 0, 1, 2, \ldots\}$, $0 < \beta < 1$, sodass die Armijo-Bedingung erfüllt ist. Zeige: Jeder Häufungspunkt der Folge $\{x^k\}$ ist ein stationärer Punkt von f.

2. Es gelten die Voraussetzungen von (1). Weiter seien die Folgen $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ und $\{d^k\}$ so, dass $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$, $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ existieren mit

   (a) $\|d^k\| \leq c_1 \|\nabla f(x^k)\|^{p_1}$ und

   (b) $\nabla f(x^k)^T d^k \leq -c_2 \|\nabla f(x^k)\|^{p_2}$

   für alle $k \in \mathbb{N}$. Dann ist jeder Häufungspunkt der Folge $\{x^k\}$ ein stationärer Punkt von f.

3. Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\{H^k\} \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Folge von symmetrischen und positiv definiten Matrizen, für die mit Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$ gilt:

   $$c_1 \|x\|^2 \leq x^T H^k x \leq c_2 \|x\|^2 \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \text{ und alle } k \in \mathbb{N}.$$

   Werden in Algorithmus 3.1 die Suchrichtungen gemäß

   $$H^k d^k = -\nabla f(x^k)$$

   bestimmt, so ist jeder Häufungspunkt der Folge $\{x^k\}$ ein stationärer Punkt von f.

4. Seine $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix und $\|\cdot\|_H$ die durch

   $$\|x\|_H := \sqrt{x^T H x}$$

   definierte Norm des $\mathbb{R}^n$. Zeige: Die Richtung des steilsten Abstiegs von f in x bezüglich $\|\cdot\|_H$ ist gegeben durch

   $$d = -\frac{H^{-1}\nabla f(x)}{\|H^{-1}\nabla f(x)\|_H}.$$

(P2) bis 21.5.2003. Implementiere das CG-Verfahren (Algorithmus 6.1) in MATLAB. Das Produkt Ad (bzw. Ax) soll dabei der Output einer Funktion sein, welche im CG-Algorithmus aufgerufen wird. Wende das Verfahren zur numerischen Lösung des folgenden Problems an: Bestimme $(u_1, \ldots, u_N)$, $N \in \mathbb{N}$, so, dass

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{N^{-2}} = f\left(\frac{i}{N+1}\right), \quad u_0 = 0, u_{N+1} = 0,$$

für $i = 1, \ldots, N$. Dabei sei f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \leq \frac{1}{2} \\ 1 + x & \text{für } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Berichte über die Anzahl an Iterationen für $N = 100, 500, 1000$ und jeweils ϵ =1E-6.