Proseminar Optimierung I, SS 2003

5. Übungsblatt

auszuarbeiten bis 7.5.2003

---

1. Gegeben sei $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx$ mit einer symmetrischen und positiv definiten (spd) Hessematrix Q. Betrachte das Verfahren des steilsten Abstiegs, d.h. $x^{k+1} = x^k - t_k \nabla f(x^k)$ mit Schrittweite $t_k > 0$ für $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Zeige für $x^k \neq 0$:
   $$\frac{\|x^{k+1}\|}{\|x^k\|} \leq \max\{|1 - t_k m|, |1 - t_k M|\},$$
   wobei m der kleinste und M der größte Eigenwert von Q sind.

   (b) Veranschauliche die rechte Seite in (a) (als Fkt. von t) graphisch, und bestimme anhand der Graphik die Menge der Schrittweiten, welche Konvergenz des Verfahrens liefern.

2. (Fortsetzung von 1.) Zeige für $x^k \neq 0$: Es existiert ein $t > 0$, sodass für $x^{k+1} = x^k - t\nabla f(x^k)$ gilt:
   $$\frac{\|x^{k+1}\|}{\|x^k\|} \leq \frac{M - m}{M + m},$$
   und interpretiere dieses Resultat im Hinblick auf das Konvergenzverhalten in Abhängigkeit von der spektralen Kondition $\kappa = M/m$.

3. (Fortsetzung von 2.) Zeige für $f(x^k) \neq 0$:
   $$\frac{f(x^{k+1})}{f(x^k)} \leq \left(\frac{M - m}{M + m}\right)^2.$$
   (Hinweis: Stelle $f(x^{k+1})$ in der Form $f(x^{k+1}) = \alpha_k f(x^k)$ mit geeignetem α_k dar, und verwende die Kantorovich-Ungleichung, *i.e.*,
   $$\frac{(y^T y)^2}{(y^T Qy)(y^T Q^{-1} y)} \geq \frac{4Mm}{(M + m)^2}$$
   für eine positive definite Matrix Q und für $y \in \mathbb{R}^n$ mit $y \neq 0$.)