Proseminar Optimierung I, SS 2003

3. Übungsblatt

auszuarbeiten bis 28.3.2003 (SR 11.32)

---

1. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = x_2^2 - ax_2\|x\|_2^2 + \|x\|_2^4, \quad 0 < a < 2.$$

Zeige, dass $x = 0$ die globale Minimalstelle ist und dass ein $\bar{\gamma} > 0$ existiert, sodass für jedes $\gamma \in (0, \bar{\gamma}]$ die Niveaumenge $L_\gamma := \{x : f(x) \leq \gamma\}$ nicht konvex ist.

2. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3(1-x)^2}{4} - 2(1-x) & \text{falls } x > 1, \\ \frac{3(1+x)^2}{4} - 2(1+x) & \text{falls } x < -1, \\ x^2 - 1 & \text{falls } |x| \leq 1. \end{cases}$$

Betrachte das Abstiegsverfahren mit $|x^0| > 1$ und $d^k = -\nabla f(x^k)$, wobei die Schrittweite $t_k > 0$ in jeder Iteration folgendermaßen bestimmt wird: Ausgehend von $t_k = 1$ verkleinere, falls notwendig, die Schrittweite bis zum ersten Mal $f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$ gilt. Analysiere anhand dieses Beispiels das Konvergenzverhalten des Verfahrens. Zeichne den Graphen der Funktion und eine repräsentative Auswahl der Iterierten.

3. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \|x\|_2^{3/2}$ und das Abstiegsverfahren mit $d^k = -\nabla f(x^k)$. Zeige, dass keine Konstante $L > 0$ existiert, sodass

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Weiter zeige, dass das Abstiegsverfahren mit obiger Richtungswahl und $t_k = t > 0$, d.h. konstanter Schrittweite, entweder in endlich vielen Schritten gegen $x^* = 0$ konvergiert oder nicht gegen x^* konvergiert.

4. Es sei $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx - b^T x$ mit $Q \in \mathcal{S}^n$ positiv definit.

   (a) Zeige: $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|_2 \leq L\|x - y\|_2$, wobei L der größte Eigenwert von Q ist;

   (b) Betrachte das Verfahren $x^{k+1} = x^k - tD\nabla f(x^k)$ mit $D \in \mathcal{S}^n$ positiv definit. Zeige, dass das Verfahren für $t \in (0, 2/\bar{L})$ gegen $x^* = Q^{-1}b$ konvergiert, wobei $\bar{L}$ der größte Eigenwert von $D^{1/2}QD^{1/2}$ ist.