Proseminar Optimierung I, SS 2003

2. Übungsblatt

auszuarbeiten bis 21.3.2003

---

1. Beweise: Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion, d.h., $f(x) = \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + \gamma$ mit einer symmetrischen Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Dann gelten folgende Aussagen:

   (a) f ist konvex $\iff$ Q ist positiv semidefinit.

   (b) f ist strikt konvex $\iff$ f ist gleichmäßig konvex $\iff$ Q ist positiv definit.

2. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex. Dann sind die Levelmengen $L_c := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq c\}$ und $L_c^0 := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < c\}$ für jedes feste $c \in \mathbb{R}$ konvex. Ist L_c^0 das Innere der Menge L_c?

3. Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $f : X \to \mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

   (a) f ist konvex (auf X).

   (b) Der *Epigraph*
   $$\mathrm{Epi}(f) := \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}$$
   ist eine konvexe Teilmenge von $X \times \mathbb{R}$.

4. Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann heißt f *pseudokonvex* (auf X), falls die Implikation
   $$\nabla f(y)^T (x - y) \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x) \geq f(y)$$
   für alle $x, y \in X$ gilt. Veranschauliche diese Definition einer pseudokonvexen Funktion im Fall $n = 1$. Gib ein Beispiel einer Funktion an, welche pseudokonvex aber nicht konvex ist.

5. Zeige:

   (a) Ist X konvex und $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare konvexe Funktion, so ist f auch pseudokonvex.

   (b) Ist x^* ein stationärer Punkt einer pseudokonvexen Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dann ist x^* eine globale Minimalstelle von f.

6. Sei f wie in Aufgabe 1 mit Q positiv definit. Seien $x \in \mathbb{R}^n$ und $d \in \mathbb{R}^n$ mit $\nabla f(x)^T d < 0$ beliebig gegeben. Zeige:

   (a) Die Schrittweite $t_{\min} := -\frac{\nabla f(x)^T d}{d^T Q d}$ liefert den stärksten Abstieg von f entlang der Richtung d, d.h., es ist $f(x + t_{\min} d) \leq f(x + td)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die strikte Ungleichung gilt für $t \neq t_{\min}$.

   (b) Es existiert eine von x und d unabhängige Konstante $\Theta > 0$ mit
   $$f(x + t_{\min} d) \leq f(x) - \Theta \left(\frac{\nabla f(x)^T d}{\|d\|} \right)^2.$$
   Interpretiere dieses Resultat aus einer algorithmischen Sicht.