Proseminar Optimierung I, SS 2003

10. Übungsblatt

auszuarbeiten bis 13.6.2003

---

1. Es sei die Annahme (A) aus der Vorlesung erfüllt. Zeige: Es existieren Konstante $K_I > 0$ und $\delta > 0$, sodass für $x_a \in B(\delta; x^*)$, $\tilde{d}$ mit

$$\|\nabla^2 f(x_a)\tilde{d} + \nabla f(x_a)\| \leq \eta_a \|\nabla f(x_a)\|,$$

und $x_+ = x_a + \tilde{d}$ gilt:

$$\|x_+ - x^*\| \leq K_I(\|x_a - x^*\| + \eta_a)\|x_a - x^*\|.$$

2. Betrachte das folgende Minimierungsproblem:

$$\text{minimiere } f(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{M} \|r_i(x)\|^2 = \frac{1}{2}R(x)^T R(x) \text{ über } x \in \mathbb{R}^n,$$

mit $R(x) = (r_1, \ldots, r_M)^T(x)$, wobei die Funktionen $r_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, M$, zweimal stetig differenzierbar sind mit Lipschitz-stetiger zweiter Ableitung. Für gegebenes x_a definiere folgendes Modell von f um x_a:

$$m_a(x) = f(x_a) + R(x_a)^T R'(x_a)(x - x_a) + \frac{1}{2}(x - x_a)^T R'(x_a)^T R'(x_a)(x - x_a).$$

Basierend auf m_a definiere–unter geeigneten Voraussetzungen–das Analogon zur Newton-Iteration. Wodurch unterscheidet sich m_a von der üblichen quadratischen Approximation von f in der Herleitung des Newton-Verfahrens? Diskutiere die Fälle $M = n$, $M > n$ und $M < n$. Welche Konvergenzgeschwindigkeit erwartet man für $f(x^*) \neq 0$?

(P3) Verwende das MATLAB-Programm vom 4.Übungsblatt. Die Suchrichtung sei nun so gewählt, dass die Newton-Richtung verwendet wird, wenn

$$c_1\|\nabla f(x^k)\|^2 \leq \nabla f(x^k)^T(\nabla^2 f(x^k))^{-1}\nabla f(x^k) \leq c_2\|\nabla f(x^k)\|^2;$$

andernfalls verwende die Richtung des steilsten Abstiegs. Experimentiere mit $0 < c_1 < c_2$. Dokumentiere die Ergebnisse für die Funktionen vom 4.Übungsblatt, und vergleiche mit dem Verfahren des steilsten Abstiegs.