Proseminar Optimierung I, SS 2003

1. Übungsblatt

auszuarbeiten bis 14.3.2003

---

1. Seien $X \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $f : X \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $x \in X$ und $d \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gegeben.

   (i) Zeige, dass
   $$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} = \nabla f(x)^T d.$$

   (ii) Zeige, dass
   $$\lim_{k \to \infty} \frac{f(x^k + t_k d^k) - f(x^k)}{t_k} = \nabla f(x)^T d,$$
   wobei $\{x^k\} \subset \mathbb{R}^n$ und $\{d^k\} \subset \mathbb{R}^n$ beliebige gegen x bzw. d konvergente Folgen sind sowie $\{t_k\} \to 0_+$.

2. Seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \geq n$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Zeige, dass $x^* \in \mathbb{R}^n$ genau dann die lineare Ausgleichsaufgabe
   $$\min \|Ax - b\|_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
   löst, wenn x^* Lösung des linearen Gleichungssystems
   $$A^T A x = A^T b$$
   ist.

3. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Weiter sei x^* eine lokale Minimalstelle von f entlang jeder Geraden durch x^*, *i.e.*, die Funktion
   $$g(\alpha) = f(x^* + \alpha d)$$
   ist für $\alpha = 0$ minimal für alle $d \in \mathbb{R}^n$. Zeige zunächst, dass $\nabla f(x^*) = 0$. Zeige weiter, dass x^* keine lokale Minimalstelle von f sein muß. (*Hinweis:* Betrachte die Funktion $f(y,z) = (z - py^2)(z - qy^2)$ mit $0 < p < q$.)

4.
   - Bestimme sämtliche lokale Minimalstellen von $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + x \cos y$.
   - Bestimme alle lokale Minimal- und Maximalstellen von $f(x,y) = \sin x + \sin y + \sin(x+y)$ in $\{(x,y) : 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi\}$.

5. Zeige mit Hilfe einer Optimierungstechnik, dass $\frac{1}{x} + x \geq 2$ für $x > 0$.

6. Sei x^* eine *lokal stabile Minimalstelle* der stetigen Funktion f, *i.e.*, es existiert ein $\delta > 0$, sodass alle Folgen $\{x^k\}$ mit $f(x^k) \to f(x^*)$ und $\|x^k - x^*\| \leq \delta$ nach x^* konvergieren. Sei g eine stetige Funktion. Zeige, dass ein $\hat{\delta} > 0$ existiert, sodass für hinreichende kleine $\epsilon > 0$ die Funktion $f(x) + \epsilon g(x)$ eine lokale Minimalstelle x_ϵ in einer Kugel um x^* mit Radius $\hat{\delta}$ besitzt. Weiter zeige, dass $x_\epsilon \to x^*$ für $\epsilon \to 0$.