Mathematik für BiologInnen
WS 2005

4. + 5. Block

A.o. Univ.-Prof. DI Dr. Michael Hintermüller

michael.hintermueller@uni-graz.at

Karl-Franzens Univeristät Graz

Institut für Mathematik und Wissenschaftl. Rechnen

Spezielle rationale Funktionen

- **Allometrie.** Beschreibung des Zusammenhangs zwischen verschiedenen morphometrischen oder physiologischen Größen (wie z.B. Masse, Länge oder Stoffwechselrate). Die Größen können sich dabei entweder auf Teile eines biologischen Systems beziehen oder auch auf das Gesamtsystem.
- Seien x und y zwei Wachstumsgrößen, welche sich in der Zeit von t bis $t + \Delta t$ um je Δx bzw. Δy verändern.

$\frac{\Delta x}{\Delta t}$	mittlere Wachstumsrate (beschreibt Wachstumsintensität für Δt klein für abnehmendes Δt: (momentane) Wachstumsrate
$r_x = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t}}{x}$	relative Wachstumsrate von x

- Falls $\frac{r_x}{r_y} = c$ (zeitunabh.), dann gilt:

$$y = bx^c \quad \text{mit } b > 0.$$

- Sind x_0, y_0 zusammengehörige Werte, dann erhält man nach Übergang zu $x' = x/x_0$, $y' = y/y_0$ die **dimensionslose Form**

$$y' = x'^c =: f(x') \text{ (Potenzfunktion).}$$

Im biologischen Kontext gilt $x, y, x', y' \geq 0$.

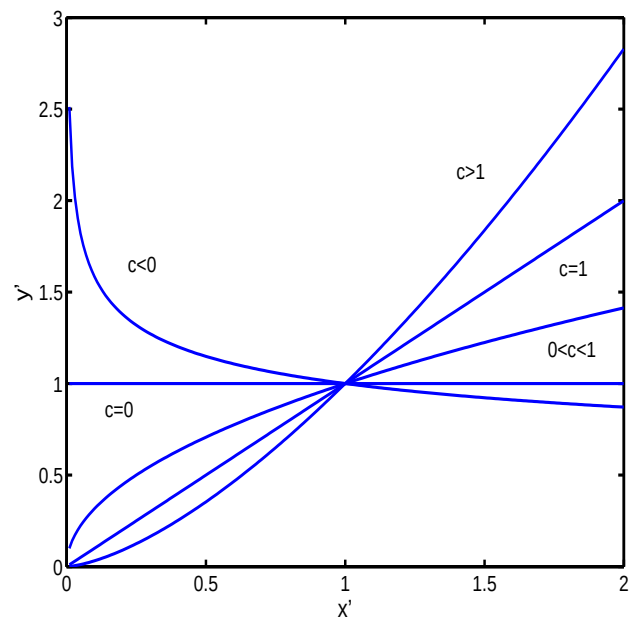
Spezielle rationale Funktionen

- $c > 0$ (positive Allometrie). Monoton wachsende Funktion:

$$x_2' > x_1' \quad \Longrightarrow f(x_2') \geq f(x_1').$$

- $c < 0$ (negative Allometrie). Monoton fallende Funktion:

$$x_2' > x_1' \quad \Longrightarrow f(x_2') \leq f(x_1').$$



Spezielle rationale Funktionen

- **Beispiel.** Für die Abhängigkeit der Wäremproduktion W (in kJ pro Tag) vom Köpergewicht M (in kg) kann bei Warmblütern in guter Näherung

$$W = bM^c$$

angenommen werden. Die Parameter b und c können bei Kenntnis zweier zusammengehörender M- und W-Werten bestimmt werden. Sind z.B. $(M_1, W_1) = (500, 28000)$ und $(M_2, W_2) = (0.5, 175)$, dann gilt

$$28000 = b500^c \text{ und } 175 = b0.5^c.$$

Nach Division und Logarithmieren folgt ($\log = \log_{10}$):

$$\log 160 = \log \frac{28000}{175} = \log \left(\frac{500}{0.5}\right)^c = c \log 1000 = 3c \quad \Rightarrow c = \frac{\log 160}{3} = 0.7347.$$

Weiter

$$b = \frac{28000}{500^c} = 291.21.$$

Spezielle rationale Funktionen

- Allometrische Funktionen treten auch in der **Biogeographie** auf. So wird zwischen der Fläche A einer Insel und der der Anzahl S der Arten einer taxonomischen Einheit der Zusammenhang

$$S = bA^c \qquad \text{(Areal-Arten-Funktion)}$$

  angenommen. Kennt man die Fläche A_0 des Bezugsareals und die Artenanzahl S_0, so kann die Areal-Arten-Funktion in die dimensionslose Form $S = S_0(A/A_0)^c$ gebracht werden.

- **Beispiel.** Für die Reptilien- und Amphibienfauna auf den Westindischen Inseln gilt etwa $S = S_0(A/A_0)^{0.3}$. Für die Insel Montserrat gilt: $A_0 = 106$ km^2 und $S_0 = 12$. Damit berechnet man für Puerto Rico mit $A = 8897$ km^2 die Artenanzahl

$$S = 12\left(\frac{8897}{106}\right)^{0.3} \approx 45.$$

- Gilt $c = 1$, so folgt $y' = x'$ bzw. $y = bx$. Man bezeichnet x und y als **direkt proportional;** $x \sim y$.

Spezielle rationale Funktionen

Beispiel. Ein Tier (Länge L) laufe mit Geschwindigkeit v eine Steigung hinauf. Hierzu muß es eine zu L^3 und v proportionale Leistung P aufbringen. Die maximale Leistung $P_{\max}$ wird allgemein als zu L^2 proportional angenommen. Zu welcher Potenz von L ist die erreichbare Maximalgeschwindigkeit $v_{\max}$ proportional?

$$P \sim L^3 \text{ (bei konst. } v) \quad \wedge \quad P \sim v \text{ (bei konst. } L).$$

Daraus folgt $P = k_1 L^3 v$ mit einer bestimmten Konstanten k_1. Somit:

$$v_{\max} = P_{\max}/(k_1 L^3).$$

Weiter $P_{\max} \sim L^2$ bzw. $P_{\max} = k_2 L^2$ mit einer bestimmten Konstanten k_2. Es ergibt sich:

$$v_{\max} = k_2/(k_1 L), \text{ d.h. } v_{\max} \sim L^{-1}.$$

Spezielle rationale Funktionen

- Doppelt-logarithmische Variablentransformation ($\log / \log$-Transformation). Hier $\log = \log_a$.

$$y = bx^c \;/\; \log \quad \Longleftrightarrow \quad y' := \log y = \log b + c \log x =: cx' + d$$

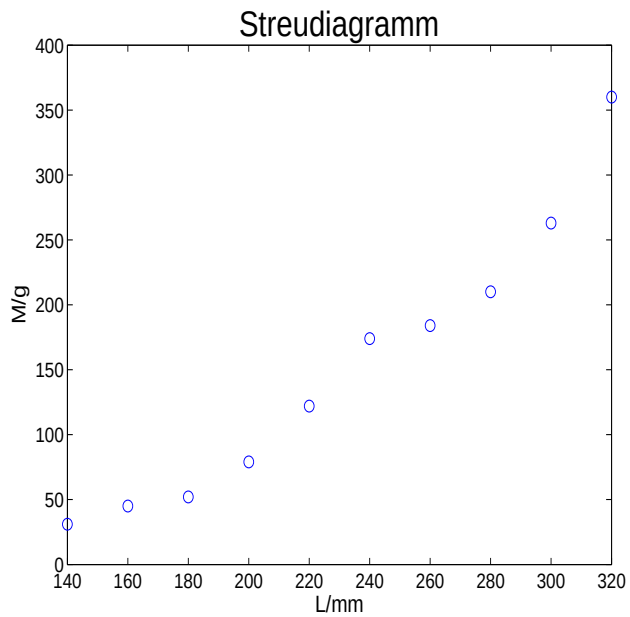
  mit $x' = \log x$ und $d = \log b$.
- Die allometrischen Zusammenhänge werde durch die $\log / \log$-Transformation in **lineare** übergeführt.
- In der Praxis sind b und c häufig unbekannt und müssen anhand von Meßdaten bestimmt werden. Dies kann mit Hilfe der $\log / \log$-Transformation mittels linearer Regression geschehen.
- Annahme: x und y erfüllen $y = b\,x^c$, und es sind n Datenpaare $(x_i, y_i) > 0$ gegeben. Vorgangsweise bei der Parameterschätzung:
  - Logarithmieren von (x_i, y_i) liefert $(x'_i, y'_i) = (\log x_i, \log y_i)$.
  - Bestimme die Regressionsgerade $\hat{y}' = \hat{k}x' + \hat{d}$ in der (x', y')-Ebene.
  - Aus den Schätzwerten $(\hat{k}, \hat{d})$ folgen die Schätzwerte $(\hat{b}, \hat{c})$ für (b, c):

$$\hat{c} = \hat{k} \quad \text{und} \quad \hat{b} = a^{\hat{d}}.$$

Spezielle rationale Funktionen

Beispiel. Von 10 Bachforellen (*Salmo trutta forma fario*) wurden die Masse M (in g) und die Länge L (in mm) bestimmt.

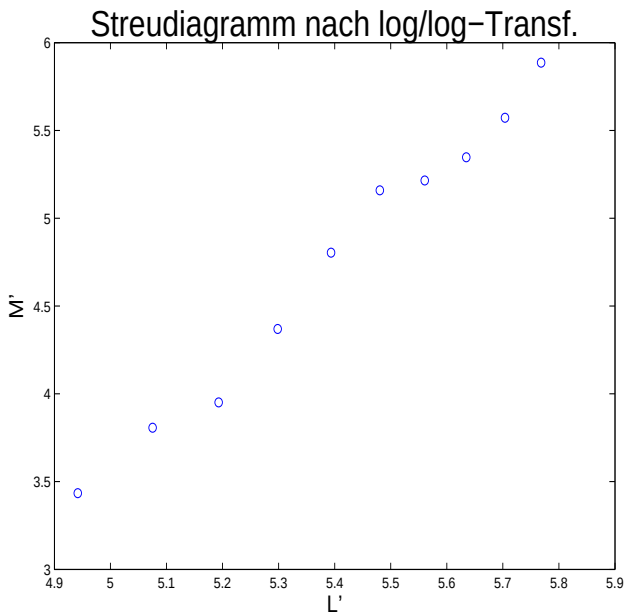
L	140	160	180	200	220	240	260	280	300	320
M	31	45	52	79	122	174	184	210	263	360

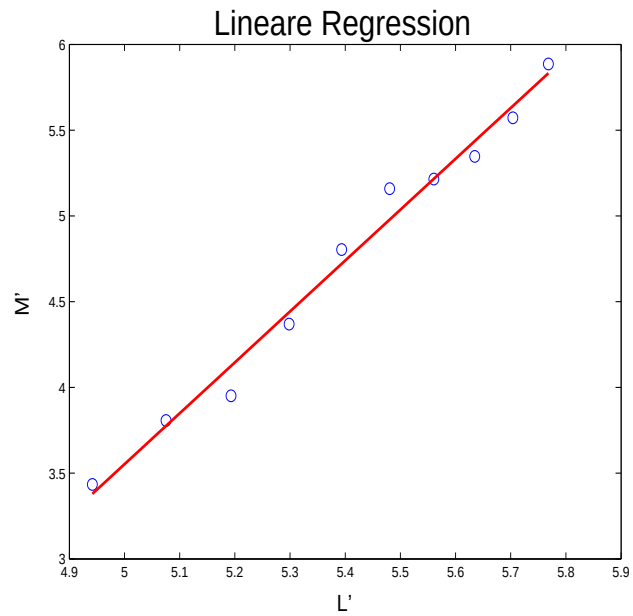


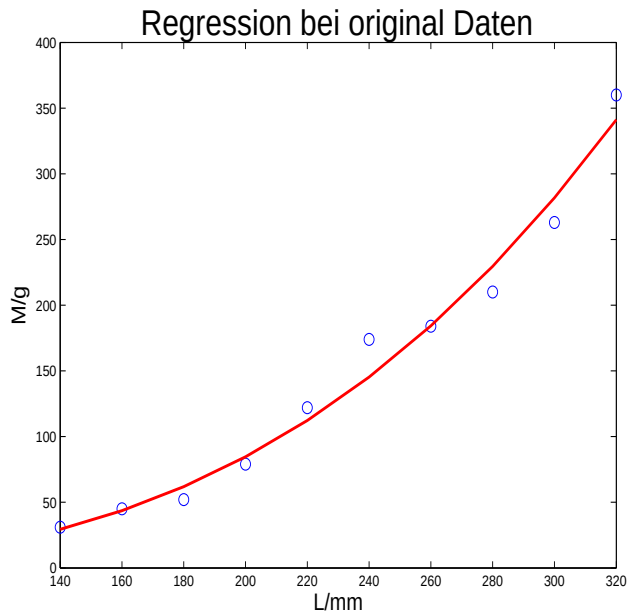
Vermutung: allometrische Formel

$$M = b\,L^c.$$

Regressionsanalyse

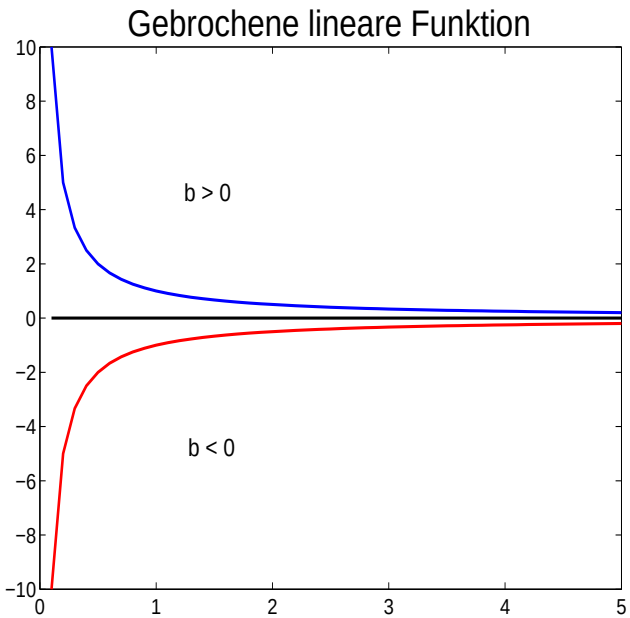






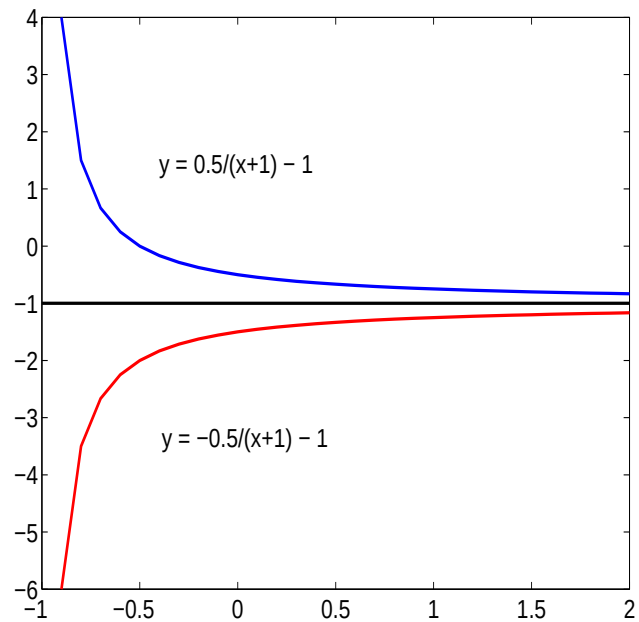
Gebrochen rationale Funktion

- Sonderfall $c = -1$: $y = b\,x^{-1} = b/x$ ... **indirekt proportional**
- Die Konstante b kann nun positiv oder auch negativ sein. Bei $x = 0$ liegt eine Unendlichkeitsstelle vor (**Polstelle**).



Allgemeine gebrochen lineare Funktion

$$y = \frac{b}{x+f} + e.$$



Gebrochen rationale Funktion

- Typischerweise wird ein Parameter (z.B. b) durch die Vorgabe eines Anfangswertes bestimmt:

$$y_0 = \frac{b}{f} + e \text{ (y_0 ...ein vorgegebener Wert)} \quad \Rightarrow \quad b = f(y_0 - e).$$

- **Beispiel.** Die Abhängigkeit der Photosyntheserate P von der Lichtintensität I kann durch die Funktionsgleichung

$$P = P(I) = P_{\max} \frac{I}{I + K}$$

mit positiven Konstanten $P_{\max}$ und K erfaßt werden.

Beachte:

$$P(I) = P_{\max} \frac{I + K - K}{I + K} = P_{\max} - \frac{P_{\max} K}{I + K}.$$

P ist also eine gebrochene lineare Funktion mit $e = P_{\max}$, $b = -P_{\max} K$ und $f = K$.

Gebrochen rationale Funktion

- Linearisierung durch **Reziproktransformation**:
  - Fall $y = b/(x+f)$. Setze $y' = 1/y$ und $x' = x$. Es ergibt sich damit die Geradengleichung

    $$y' = \frac{x'}{b} + \frac{f}{b}.$$

    Bestimmung der Regressionsgeraden $\hat{y}' = \hat{k}x' + \hat{d}$ liefert die Schätzwerte

    $$\hat{b} = \frac{1}{\hat{k}} \quad \text{und} \quad \hat{f} = \frac{\hat{d}}{\hat{k}}.$$

  - Fall $y = b/(x+f) + e$ mit Anfangswert $y_0 = b/f + e = 0$. Dann folgt: $y = ex/(x+f)$. Setze $y' = 1/y$ und $x' = 1/x$. Es ergibt sich damit die Geradengleichung

    $$y' = \frac{f}{e}x' + \frac{1}{e}.$$

    Bestimmung der Regressionsgeraden $\hat{y}' = \hat{k}x' + \hat{d}$ liefert die Schätzwerte

    $$\hat{e} = \frac{1}{\hat{d}}, \qquad \hat{f} = \frac{\hat{k}}{\hat{d}} \quad \text{und} \quad \hat{b} = -\hat{e}\,\hat{f}.$$

Exponentialfunktion

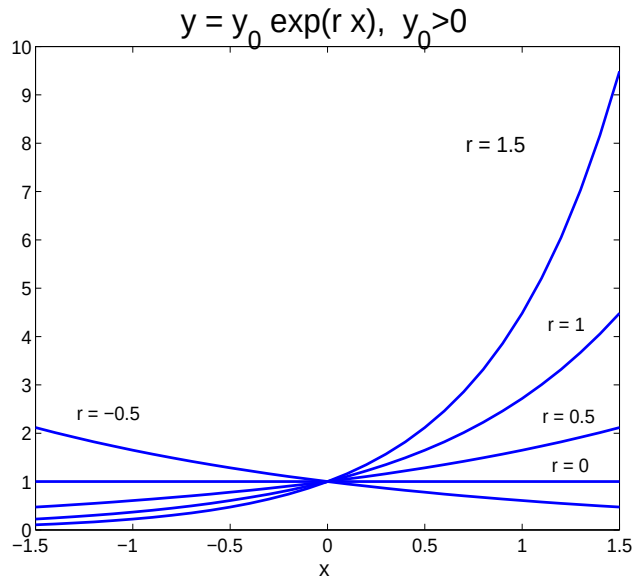
- Viele Wachstums- oder Zerfallphänomene genügen dem folgenden Prinzip: Sei y eine Bestandsgröße zum Zeitpunkt t, dann gilt für hinreichend kleines Δt

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = ry \qquad (\frac{\Delta y}{\Delta t} \sim y),$$

wobei r Wachstums-, Zerfalls- oder Ausscheiderate genannt wird.

- Dieses Prinzip der bestandsproportionalen Änderung wird ausgedrückt durch

$$y = y_0 e^{rt} \qquad (y_0 \ldots \text{Wert der Bestandsgröße zum Zeitpunkt } t = 0).$$



Exponentialfunktion

Beispiel. Die Einwohnerzahl von Mexiko-City betrug 5.5 Mio. im Jahr 1960 und stieg bis 1975 auf 8.1 Mio. an. Unter der Annahme eines exponentiellen Wachstums soll die Einwohnerzahl (in Mio.) in Abhängigkeit von der Zeit t dargestellt werden.

Wir verlegen den Nullpunkt der Zeitskala in das Jahr 1960. Dann ist $y = 5.5$ für $t = 0$ und $y = 8.1$ für $t = 15$. Zu bestimmen sind y_0 und r. Es folgt:

$$y_0 = y(0) = 5.5 \text{ und für } t = 15 \text{ gilt } 8.1 = 5.5e^{15\,r}.$$

Es folgt

$$\ln 8.1 = \ln 5.5 + \ln(e^{15\,r}) = \ln 5.5 + 15\,r \quad \Rightarrow \quad r \approx 2.58\%.$$

Ist man an der Verdopplungszeit interessiert, dann sucht man t', sodass

$$y' = 2y_0 = y_0 e^{r\,t'} \quad \Rightarrow \quad 2 = e^{r\,t'}$$

Es folgt:

$$\ln 2 = r\,t' \quad \Rightarrow \quad t' = 26.9 \text{ Jahre.}$$

Exponentialfunktion

- **Linearisierung durch einfache $\log$-Transformation**. Seien $y_0 > 0$ und $r \neq 0$. Setze $y' = \ln y$. Dann folgt:

$$y' = \ln y = \ln y_0 + r\,t.$$

- Möchte man die Parameter r und y_0 anhand von n Wertepaaren (t_i, y_i) schätzen, so kann man folgendermaßen vorgehen:
  - Logarithmiere die y-Komponente der Daten: $(t_i, y_i') = (t_i, \ln y_i)$.
  - Bestimme die Regressionsgerade $\hat{y}' = \hat{k}t + \hat{d}$ in der (t, y')-Ebene.
  - Die Parameterschätzung $(\hat{r}, \hat{y}_0)$ ergibt sich aus

$$\hat{r} = \hat{k} \quad \text{und} \quad \hat{y}_0 = e^{\hat{d}}.$$